SS 2011

Zentralübung
Diskrete Strukturen
(zur Vorlesung Prof. Mayr)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2011SS/ds/uebung/

30. August 2011

ZÜ II

Übersicht:

1. Übungsbetrieb:	Fragen, Probleme? „Das Versteh' ich nicht!“
2. Themen:	R^* und Σ^*. Konzepte der Abstraktion: Morphismen und Algebren.
4. Vorbereitung	Prädikatenlogische Verneinung (VA 1) Beweisarten (VA 2) Wachstum von Funktionen (VA 3) Rechnung modulo m (VA 6) Permutationen und Zyklen (VA 5) Gruppen und Untergruppen (VA 4)

1. Übungsbetrieb

1.1 Fragen, Probleme?

?

1.2 ,,Das Versteh' ich nicht!“

Falsche Lesetechnik? Lesen und hören Sie strukturiert!

Eine Definition wird zunächst syntaktisch funktional analysiert.

Ein inhaltliches Verständnis entsteht in nachfolgenden Schritten.

2. Thema

2.1 R^* und Σ^*

Zur Erinnerung:

R^* bezeichnet die
reflexive transitive Hülle einer Relation $R \subseteq M \times M$.
(Siehe Blatt 1, TA 4)

Σ^* bezeichnet die
Menge aller endlichen Wörter über dem Alphabet Σ oder
Kleenesche Hülle von Σ.
(Siehe Blatt 2, HA 3)

Bemerkung:
Beide Begriffe gibt es gleichlautend auch in der Einführung Info 1.

2.2 Gleichungen

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
R^* &= \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n \quad \text{mit} \\
R^0 &= id_M \,, \\
\\
\Sigma^* &= \bigcup_{n=0}^{\infty} W_n \quad \text{mit} \\
W_0 &= \{\epsilon\} \,, \\
W_n &= \{x_1 x_2 \ldots x_n \,;\, x_i \in \Sigma\} \,.
\end{aligned}
$$

3. Thema

3.1 Isomorphismus

Ein Isomorphismus vergleicht Bereiche,
die bis auf Bezeichnungsänderung identisch sind.

Ein Isomorphismus etabliert dadurch einen abstrakten Standpunkt,
von dem aus Dinge als im Wesentlichen gleich erscheinen,
d.h. eine gleiche Gestalt haben,
insbesondere unabhängig von den Bezeichnungen.

Berühmte Beispiele: Die Kardinalzahlen des Zählens (nach Cantor).

3.2 Homomorphismus

Mit einem Homomorphismus betrachtet man
eine Struktur unter einem gewissen abstrakten Aspekt.

Die Vertauschbarkeit wird benutzt um komplexe Operationen
durch einfachere Operationen zu ersetzen.

Beispiel 1: Wenn man die ganzen Zahlen unter dem Aspekt
„gerade Zahl“ bzw. „ungerade Zahl“ betrachtet, dann wird diese
Betrachtung durch den folgenden Homomorphismus etabliert.

$$f : \mathbb{Z} \ni x \mapsto (x \bmod 2) \in \mathbb{Z}_2 \,.$$

Beispiel 2: Wenn man die Zeit in Tagen mit je 24 Stunden zählt, dann wird das modelliert durch den Homomorphismus

$$f : \mathbb{Z} \ni x \mapsto (x \bmod 24) \in \mathbb{Z}_{24} .$$

Bemerkung:
Man beachte die Darstellung der ganzen Zahlen durch die Komponenten Fortschritt (Tage) und Wiederholung (24 Stunden).

Die Tage mit festgehaltener Uhrzeit
durchschreiten eine Restklasse
zur Untergruppe der durch 24 teilbaren Stundenzahlen.

Die Uhrzeit durchläuft zyklisch wiederholt die 24 Stunden.

3.3 Abstraktion durch Algebren

Unterschiedliche Rechenstrukturen werden durch Algebren auf einen

gemeinsamen Nenner

gebracht und sind dann in gewisser Weise gleich.

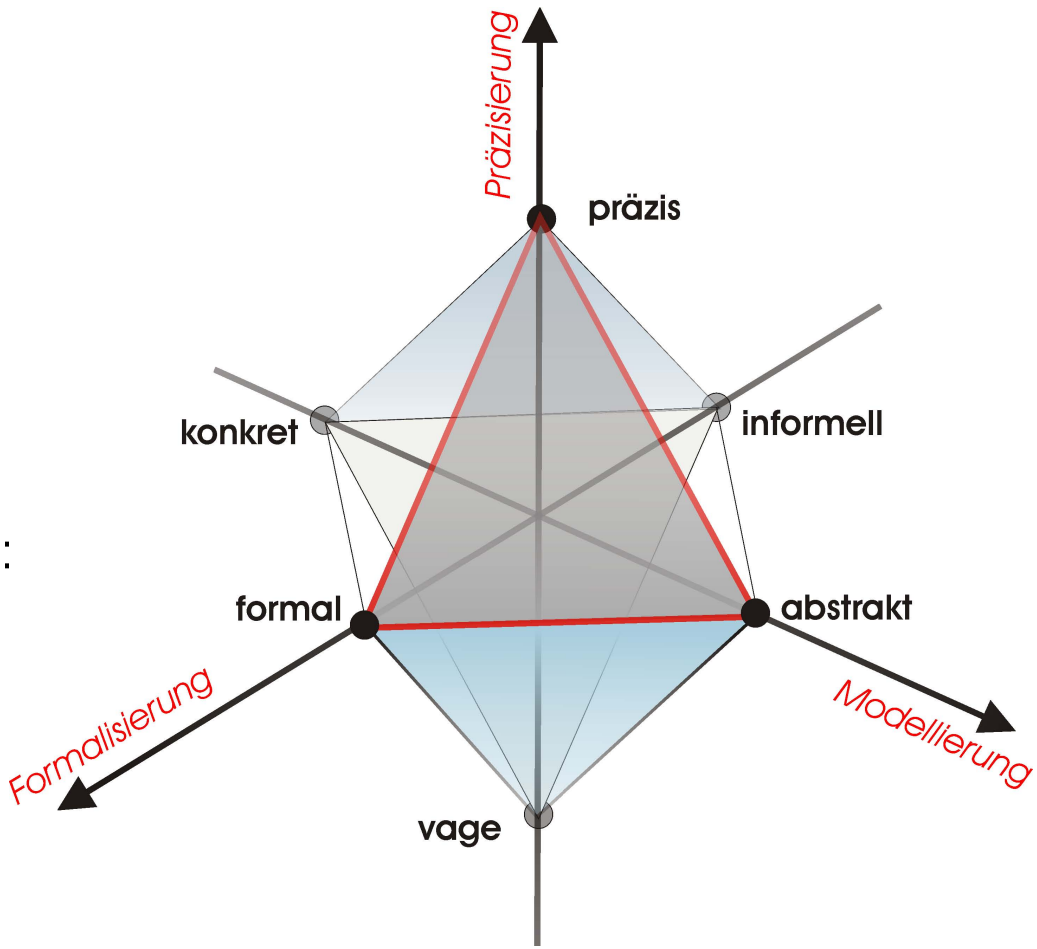
Auch dadurch wird eine Abstraktion geleistet.

Erinnerung an ZÜ 1:

Wissenschaftliche Schulung und Entwicklung
vollzieht sich im Spannungsfeld folgender Begriffspaare:

- vage — präzis
- konkret — abstrakt
- informell — formal

Darstellung im Oktaeder:



4. Vorbereitung auf TA's Blatt 3

4.1 VA 1, Prädikatenlogik

Wir betrachten prädikatenlogische Formeln mit Prädikaten über dem Universum $\mathbb{R}$.

1. Wir nehmen an, dass für einstellige Prädikate P und Q die folgende Aussage gilt:

$$(\exists x)[P(x)] \quad \wedge \quad (\forall x)[P(x) \Rightarrow Q(x)]$$

   Man zeige, dass dann $(\exists x)[Q(x)]$ folgt.

Lösung:

Wir lösen die Formeln schrittweise auf und fügen anschließend die zu beweisende Formel zusammen.

Nach Voraussetzung gilt die Aussage

$$(\exists x)[P(x)]\,.$$

Deshalb können wir von einem $a \in \mathbb{R}$ mit Eigenschaft $P(a)$ als ein bereits bestimmtes Element ausgehen. Von diesem a ist allerdings nur bekannt, dass $P(a)$ gilt.

Sei also $a \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $P(a)$.

Da die Aussage

$$(\forall x)[P(x) \Rightarrow Q(x)]$$

ebenfalls gilt, bedeutet dies für das bestimmte a, dass die Aussage

$$[P(a) \Rightarrow Q(a)]$$

gilt.

Es gelten also die beiden Aussagen $P(a)$ und $[P(a) \Rightarrow Q(a)]$.

Daraus können wir mit Modus ponens folgern, dass

$$Q(a)$$

gilt.

Da wir nun sozusagen ein Element a konstruiert haben, für das $Q(a)$ gilt, haben wir bewiesen, dass die Aussage

$$(\exists x)[Q(x)]$$

gilt. W.z.b.w.

2. Wir nehmen an, dass für ein 3-stelliges Prädikat P die folgende Aussage F gilt:

$$(\forall x\ \exists y\ \forall z)\,[P(x,y,z)]\,.$$

Man leite eine pränexe prädikatenlogische Formel her, die zu

$$\neg F$$

äquivalent ist.

Lösung:

Wenn *nicht* für alle $x \in \mathbb{R}$
die Eigenschaft $Q(x)$ gilt,
dann ist dies gleichbedeutend damit, dass

für mindestens ein $x \in \mathbb{R}$
die Eigenschaft $Q(x)$ *nicht* gilt.

Für alle Formeln $(\forall x)[Q(x)]$ gilt also

$$\neg(\forall x)[Q(x)] \equiv (\exists x)[\neg Q(x)]\,.$$

Achtung: die Formel $\neg(\forall x)[Q(x)]$ ist nicht in pränexer Form.

Wir wenden diese Umformungsregel (nach DeMorgan) nun auf $\neg F$ an wie folgt.

$$
\begin{aligned}
\neg F &\equiv \neg(\forall x)\ [\exists y\ [\forall z\ [P(x,y,z)]]] \\
&\equiv \exists x\ [\neg(\exists y)\ [\forall z\ [P(x,y,z)]]] \\
&\equiv \exists x\ [\forall y\ [\neg(\forall z)\ [P(x,y,z)]]] \\
&\equiv \exists x\ [\forall y\ [\exists z\ [\neg P(x,y,z)]]] \\
&\equiv (\exists x\ \forall y\ \exists z)\ [\neg P(x,y,z)]\,.
\end{aligned}
$$

4.2 VA 2, Beweisarten

1. *Direkter Beweis*:
   Geben Sie für die folgende Aussage einen direkten Beweis an.

   Das arithmetische Mittel $b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ von n Zahlen a_i, $1 \leq i \leq n$ bleibt unverändert, falls die Folge der a_i mit beliebig vielen $b's$ erweitert wird, d. h.

$$b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \;=\; \frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \;+\; m \cdot b\right) .$$

Bemerkung:
Auch leeren Summen wird ein Wert zugewiesen,
und zwar das jeweilige ,,neutrale“ Element der Operation,
d. h. hier 0 für die leere Summe.

Eine leere Summe liegt z. B. immer dann vor,
wenn der Laufindex i bei i_0 beginnt, aber $n < i_0$ gilt,
d. h. wir setzen $i_0 \leq i \leq n$ voraus.

Lösung:

Intuitiv ist klar, dass die Hinzunahme des Wertes des arithmetischen Mittels zu den Werten, über die das Mittel gebildet wird, das Mittel selbst nicht verändert.

Die entsprechende Rechnung ist wie folgt.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \;+\; m \cdot b\right) &= \frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \;+\; m \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \\
&= \frac{1}{n+m}\left(1+\frac{m}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} a_i \\
&= \frac{1}{n+m}\left(\frac{n+m}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} a_i \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \,.
\end{aligned}$$

2. *Indirekter Beweis*:
   Es seien $m, n, k \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen mit $m > n \cdot k$.
   Zeigen Sie:

   Verteilt man m Hamster auf n Käfige, so befinden sich in mindestens einem Käfig $k + 1$ oder mehr Hamster.

   Führen Sie einen indirekten Beweis, indem Sie annehmen, in allen Käfigen würden sich nach einer Verteilung weniger als $k + 1$ Hamster befinden.

Lösung:

Die Voraussetzung $m > n \cdot k$ bezeichnen wir als Aussage A.

Wir bezeichnen die Anzahl der in Käfig i $(1 \leq i \leq n)$ befindlichen Hamster als h_i.

Zu zeigen ist dann die Aussage B mit

$$B = (\exists i, 1 \leq i \leq n) \; [h_i \geq k + 1] \, .$$

Insgesamt haben wir also die Implikation $A \Rightarrow B$ zu zeigen.

Indirekter Beweis:
Wir zeigen die Kontraposition von $A \Rightarrow B$, d. h.

$$\neg B \Rightarrow \neg A$$

.

Annahme: Es gelte $\neg B$, d. h., für alle i gelte $h_i < k + 1$.

Wegen $h_i \leq k$ schätzen wir die Gesamtzahl m aller Hamster in den Käfigen ab mit

$$m = \sum_{i=1}^{n} h_i \leq \sum_{i=1}^{n} k = n \cdot k\,.$$

Damit ist die Negation der Voraussetzung $m > n \cdot k$ gezeigt, mithin Aussage $\neg A$.

3. *Schubfachprinzip*:

   Lassen sich obige Aussagen auch mit dem ,,Schubfachprinizip“ beweisen?

Antwort:
Das Schubfachprinzip beweist eine
Existenzaussage ohne Konstruktion eines bestimmten Elements,
wie z.B.:

Es gibt einen Käfig, in dem mehr als k Hamster sitzen.

Die Teilaufgabe 2 kann sehr gut mit dem Schubfachprinzip bewiesen werden.
Dazu definiert man eine Abbildung f, die die Menge der m Hamster in die Menge der n Käfige abbildet.

Aussagen der Art, dass ein Beweis mit einer bestimmten Struktur nicht existiert, sind im Allgemeinen falsch.

Trotzdem bietet sich für den erstgenannten direkten Beweis keine Anwendung des Schubfachprinzips an, weil er auf keine derartige Existenzaussage abzielt.

Teilaufgabe 1 ist für die Anwendung des Prinzips nicht geeignet.

4.3 VA 3, Wachstum

1. Man zeige:
$$(\log n^2)^2 \in o(2^{\ln n}) .$$

$\log$ ohne Angabe der Basis bedeutet, dass die Formel für alle zulässigen Basen zu beweisen ist.

Lösung:

Es ist zu zeigen:

$$(\forall c > 0\ \exists n_c \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_c)\ \left[|(\log n^2)^2| < c \cdot 2^{\ln n}\right].$$

Sei b eine beliebige zulässige Basis.

Wir lösen die Formel schrittweise auf.

Sei c eine beliebige reelle Zahl mit $c > 0$.
Nun konstruieren wir ein natürliche Zahl n_c, so dass gilt

$$(\forall n \geq n_c)\,[(\log n^2)^2 < c \cdot 2^{\ln n}]\,.$$

Umformung:

$$(\log_b n^2)^2 = \frac{4}{(\ln b)^2} \cdot (\ln n)^2 < c \cdot 2^{\ln n}\,.$$

Wir bezeichnen $\ln n$ mit x,
d.h. wir setzen $x = \ln n$,
und wir setzen $k = \frac{4}{(\ln b)^2}$.

Nun benutzen wir die Ungleichung $x^3 < 2^x$ für $x \geq 10$.

Die Ungleichung folgt leicht aus $3 \ln x < x \ln 2$ für $x \geq 10$.

Dann gilt für $x \geq 10$ und $\frac{k}{x} \leq c$

$$k \cdot x^2 = \frac{k}{x} \cdot x^3 < c \cdot 2^x \, .$$

Nun setzen wir $x_c = max\{10, \frac{k}{c}\}$ und $n_c = \lceil e^{x_0} \rceil$

und erhalten für alle $n \geq n_c$ die gewünschte Ungleichung.

3. Sei $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ mit $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$.
   Man zeige $f(x) = \mathcal{O}(x^n)$.

Lösung:

Es ist zu zeigen

$$(\exists c > 0\ \exists n_c \in \mathbb{N}\ \forall x \geq n_c)\,[|f(x)| \leq c \cdot x^n]\,.$$

Es gelten für alle $x \geq 1$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \left|\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i\right| \leq \sum_{i=0}^{n} |a_i| \cdot x^i \\ &\leq x^n \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i| \cdot x^{i-n}\right) \leq x^n \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{n} |a_i|}_{=:c} \end{aligned}$$

Wir können beispielsweise $c = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$ und $n_c = 2$ setzen.

4.4 VA 6, Rechnen modulo m

Ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ nennt man

kongruent modulo m, mit $m \in \mathbb{N}$, i. Z. $a \equiv b\,(mod\,m)$,

falls sich a und b um ein ganzzahliges Vielfaches von m unterscheiden, d. h.,

falls es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass gilt

$$a = b + k \cdot m\,.$$

Diesen Zusammenhang kann man der Definition der Operation $\mathrm{mod} : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ zugrunde legen:

$$b = a \bmod m \iff a \equiv b\,(mod\,m) \text{ und } 0 \leq b < m\,.$$

Teil 1:

Zeigen Sie für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$:

$$a \equiv a \bmod m \ (mod\, m)\,, \tag{1}$$

$$(a+b) \bmod m = [(a \bmod m) + (b \bmod m)] \bmod m\,, \tag{2}$$

$$(a \cdot b) \bmod m = [(a \bmod m) \cdot (b \bmod m)] \bmod m\,. \tag{3}$$

1. Zu beweisen ist: $a \equiv a \bmod m \ (mod\, m)$

Lösung:

Die Kongruenz modulo m ist definiert durch

$$x \equiv y \,(\bmod m) \quad :\Longleftrightarrow \quad (\exists k \in \mathbb{Z})\,[\,x = y + k{\cdot}m\,]\,.$$

Nach Definition von $(a \bmod b)$ gilt für ein bestimmtes $k \in \mathbb{Z}$

$$a \bmod b = a + k{\cdot}b\,, \quad \text{d. h.} \quad a = a \bmod b + k'{\cdot}b\,,$$

mithin

$$a \equiv a \bmod b \,(mod\, b)\,.$$

2. Zu beweisen ist:
$$(a+b) \bmod m = [(a \bmod m) + (b \bmod m)] \bmod m\,.$$

Lösung:

Wir setzen linke Seite bzw. rechte Seite der Gleichung

$$\begin{aligned} x &:= (a+b) \bmod m\,, \\ y &:= [(a \bmod m) + (b \bmod m)] \bmod m\,. \end{aligned}$$

und zeigen $x = y$.

Es gilt $0 \leq x, y < m$ und

$$\begin{aligned} x &= a + b + k_x \cdot m\,, \\ y &= (a \bmod m) + (b \bmod m) + k_y \cdot m\,, \\ (a \bmod m) &= a + k_a \cdot m\,, \\ (b \bmod m) &= b + k_b \cdot m \end{aligned}$$

für gewisse $k_a, k_b, k_x, k_y \in \mathbb{Z}$ und es folgt

$$\begin{aligned} y &= a + k_a \cdot m + b + k_b \cdot m + k_y \cdot m \\ &= x - k_x \cdot m + k_a \cdot m + k_b \cdot m + k_y \cdot m \\ &= x + (k_a + k_b + k_y - k_x) \cdot m \\ &= x + k \cdot m\,. \end{aligned}$$

Wegen $0 \leq x, y < m$ folgt $x = y$.

Analog verläuft der Beweis der Gleichung 3:

$$(a \cdot b) \bmod m = [(a \bmod m) \cdot (b \bmod m)] \bmod m \,.$$

Teil 2:

In enger Beziehung zur mod-Operation steht die ganzzahlige Division $a \operatorname{div} m$ zweier Zahlen $a \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$.

Es gilt

$$a = (a \operatorname{div} m) \cdot m + (a \bmod m)\,.$$

Berechnen Sie:

(i) $5 \operatorname{div} 4$, (ii) $(-5) \operatorname{div} 4$, (iii) $(-x) \operatorname{div} 1$.

(i) $5 \text{ div } 4$:

Seien $a = 5$ und $m = 4$.

Dann gilt

$$(5 \operatorname{div} 4) \cdot 4 \;=\; 5 - (5 \bmod 4) \;=\; 5 - 1 \;=\; 4\,.$$

Es folgt $5 \operatorname{div} 4 = 1$.

(ii) (-5) div 4:

Seien $a = -5$ und $m = 4$.

Dann gilt

$$\begin{aligned}((-5)\operatorname{div} 4)\cdot 4 &= -5-((-5)\bmod 4)\\ &= (-5-((-5+8)\bmod 4))\\ &= (-5-3) = -8\,.\end{aligned}$$

Es folgt $(-5)\operatorname{div} 4 = -2\,.$

(iii) $(-x)$ div 1:

Seien $a = -x$ und $m = 1$.

Dann gilt

$$((-x) \operatorname{div} 1) \cdot 1 \;=\; -x - ((-x) \bmod 1) \;=\; -x - 0 \;=\; -x\,.$$

Es folgt $(-x) \operatorname{div} 1 = -x\,.$

4.5 VA 5, Permutationen und Zyklen

Sei M eine endliche Menge und $z = (a_0, a_1, \ldots, a_{|M|-1})$ ein $|M|$-Tupel mit paarweise verschiedenen $a_i \in M$.

Dann ist die Abbildung

$$\pi_z : M \to M \text{ mit } \pi_z(a_i) = a_{(i+1) \bmod |M|}$$

ein *Zyklus* der *Länge* $|M|$ mit *Basis* M und *Darstellung* z.

Für jeden Zyklus π bezeichne $M(\pi)$ die Basis von π.

Man kann π_z als zyklische Nachfolgerbildung in M auffassen.

1. **Wie viele Darstellungen**
   besitzt ein Zyklus der Länge 3?

   Welchen Zyklus
   stellt $z = (4, 1, 3, 2)$ dar und welche Basis hat der Zyklus?

   Welche verschiedenen Darstellungen
   hat ${\pi_z}^3$?

   Ist ${\pi_z}^4$ ein Zyklus ?

Lösung:

Bemerkung:

Für Operationen f über einer Menge M, d.h. $f : M \to M$, gibt es die mehrfache Hintereinanderausführung der Operation f mit entsprechenden Schreibweisen. Es gilt

$$f^2 = f \circ f, \quad \text{und allgemein} \quad f^{n+1} = f \circ f^n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

d. h. für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in M$

$$f^{n+1}(x) = f(f^n(x)), \quad \text{insbesondere } f^2(x) = f(f(x)).$$

Wie viele Darstellungen besitzt ein Zyklus der Länge 3?

Antwort: 3.

Begründung:
Sei π ein Zyklus der Länge 3 mit Basis $M(\pi) = \{a, b, c\}$. Für jede Darstellung $z = (a_1, a_2, a_3)$ von π gilt

$$a_1 \in M, \quad a_2 = \pi(a_1), \quad a_3 = \pi^2(a_1) = \pi(a_2)\,.$$

Damit gibt es genau die folgenden drei Darstellungen

$$z_1 = (a, \pi(a), \pi^2(a))\,, \quad z_2 = (b, \pi(b), \pi^2(b))\,, \quad z_3 = (c, \pi(c), \pi^2(c))\,.$$

Welchen Zyklus stellt $z = (4, 1, 3, 2)$ dar und welche Basis hat der Zyklus?

Antwort:

Die Basis von $z = (4, 1, 3, 2)$ ist $M_z = \{1, 2, 3, 4\}$.

Für den dargestellten Zyklus $\pi_z : M \to M$ gilt

$$\pi_z(1) = 3\,, \quad \pi_z(2) = 4\,, \quad \pi_z(3) = 2\,, \quad \pi_z(4) = 1\,.$$

Welche verschiedenen Darstellungen hat ${\pi_z}^3$?

Antwort:

Es gilt

$$\begin{aligned}
{\pi_z}^3(1) &= {\pi_z}^2(\pi_z(1)) = {\pi_z}^2(3) = \pi_z(\pi_z(3)) = \pi_z(2) = 4\,,\\
{\pi_z}^3(2) &= {\pi_z}^2(\pi_z(2)) = {\pi_z}^2(4) = \pi_z(\pi_z(4)) = \pi_z(1) = 3\,,\\
{\pi_z}^3(3) &= {\pi_z}^2(\pi_z(3)) = {\pi_z}^2(2) = \pi_z(\pi_z(2)) = \pi_z(4) = 1\,,\\
{\pi_z}^3(4) &= {\pi_z}^2(\pi_z(4)) = {\pi_z}^2(1) = \pi_z(\pi_z(1)) = \pi_z(3) = 2\,.
\end{aligned}$$

${\pi_z}^3$ ist ein Zyklus mit genau den folgenden 4 Darstellungen.

$$z_1{=}(1,4,2,3)\,,\quad z_2{=}(2,3,1,4)\,,\quad z_3{=}(3,1,4,2)\,,\quad z_4{=}(4,2,3,1)\,.$$

Ist ${\pi_z}^4$ ein Zyklus?

Antwort: Nein!

Begründung:
Es gilt

$$\begin{aligned}
{\pi_z}^4(1) &= \pi_z({\pi_z}^3(1)) = 1\,,\\
{\pi_z}^4(2) &= \pi_z({\pi_z}^3(2)) = 2\,,\\
{\pi_z}^4(3) &= \pi_z({\pi_z}^3(3)) = 3\,,\\
{\pi_z}^4(4) &= \pi_z({\pi_z}^3(4)) = 4\,.
\end{aligned}$$

${\pi_z}^4$ ist kein Zyklus, weil $|\{(\pi^4)^n(1)\,|\,n \in \mathbb{N}\}| = 1 \neq 4\,.$

Tatsächlich ist ${\pi_z}^4$ gleich der Identität id.

Zyklen ρ, σ heißen *disjunkt*, falls $M(\rho) \cap M(\sigma) = \emptyset$ gilt, d. h., falls deren Basismengen disjunkt sind.

Eine Menge Z von paarweise disjunkten Zyklen heißt *Zyklenpartition*.

Dabei bildet die Menge der Basismengen

$$P_Z = \{M(\pi)\,;\, \pi \in Z\}$$

eine Mengenpartition der Vereinigung der Basismengen

$$M(Z) = \bigcup_{\pi \in Z} M(\pi)\,.$$

Wir sagen, dass Z eine Zyklenpartition der Menge $M(Z)$ ist.

2. Welche Basis haben die Zyklen zu
$z_1 = (2, 5)$, $z_2 = (1)$, $z_3 = (5, 4, 3, 2, 1)$?

   Geben Sie eine extensionale Darstellung
   der Abbildungen π_{z_i} an!

   Warum ist $Z = \{\pi_{z_1}, \pi_{z_2}, \pi_{z_3}\}$ keine Zyklenpartition von $[5]$?

Welche Basis haben die Zyklen zu
$z_1 = (2, 5)$, $z_2 = (1)$, $z_3 = (5, 4, 3, 2, 1)$?

Antwort:

Für die Basismengen $M(\pi_{z_i})$ gelten die Gleichungen

$M(\pi_{z_1}) = \{2, 5\}$,
$M(\pi_{z_2}) = \{1\}$,
$M(\pi_{z_3}) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Geben Sie eine extensionale Darstellung der Abbildungen π_{z_i} an!

Antwort:

Es gilt mit Auflistung der Funktionswerte

$$\pi_{z_1}(2) = 5\,, \quad \pi_{z_1}(5) = 2\,.$$

$$\pi_{z_2}(1) = 1\,.$$

$$\pi_{z_3}(1) = 5\,, \quad \pi_{z_3}(2) = 1\,, \quad \pi_{z_3}(3) = 2\,, \quad \pi_{z_3}(4) = 3\,, \quad \pi_{z_3}(5) = 4\,.$$

Warum ist $Z = \{\pi_{z_1}, \pi_{z_2}, \pi_{z_3}\}$ keine Zyklenpartition von $[5]$?

Antwort:

Offenbar sind die Zyklen nicht paarweise disjunkt.

Für die Basismengen gilt z. B. $M(\pi_{z_1}) \cap M(\pi_{z_3}) \neq \emptyset$.

Sei Z eine Zyklenpartition von $[n]$. Dann ist eine bijektive Abbildung $f_Z : [n] \to [n]$ gegeben für alle $i \in [n]$ durch

$$f_Z(i) = \pi(i), \quad \text{falls} \quad i \in M(\pi) \text{ und } \pi \in Z\,.$$

3. Zyklenpartitionen werden häufig durch eine Folge $z_1 z_2 \ldots z_k$ von Zyklusdarstellungen z_i definiert, wobei die Reihenfolge der z_i in der Folge keine Rolle spielt.

   Sei $Z = (4, 5, 1)(3)(2)$ eine Zyklenpartition.

   Beschreiben Sie die Abbildung f_Z extensional!

Lösung:

Für f_Z gilt mit Auflistung der Funktionswerte

$$f_Z(1) = 4\,, \quad f_Z(2) = 2\,, \quad f_Z(3) = 3\,, \quad f_Z(4) = 5\,, \quad f_Z(5) = 1\,.$$

4. Eine Funktion f sei gegeben durch die folgende Matrixdarstellung.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 1 & 6 & 2 & 7 & 9 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie
$\{f^i(2)\,;\, i \in \mathbb{N}\}$, $\{f^i(3)\,;\, i \in \mathbb{N}\}$, $\{f^i(5)\,;\, i \in \mathbb{N}\}$!

Bestimmen Sie eine *Zyklendarstellung von* f,
d. h. eine Zyklenpartition Z von $[9]$,
so dass $f(i) = f_Z(i)$ für alle $i \in [9]$ gilt!

Lösung:

Durch Auswertung von $f_Z^i(x)$ erhält man

$$\{f_Z^i(2)\,;\, i \in \mathbb{N}\} = \{1,8,4,2\}\,, \tag{1}$$
$$\{f_Z^i(3)\,;\, i \in \mathbb{N}\} = \{6,9,3\}\,, \tag{2}$$
$$\{f_Z^i(5)\,;\, i \in \mathbb{N}\} = \{7,5\}\,. \tag{3}$$

Wir bezeichnen die Mengen in den Gleichungen (1), (2) und (3) entsprechend mit M_1, M_2 bzw. M_3. Dann definiert f je einen Zyklus f_i auf den Basismengen M_1, M_2 und M_3 mit den entsprechenden Darstellungen

$$z_1 = (1,8,4,2)\,, \quad z_2 = (6,9,3) \quad \text{bzw.} \quad z_3 = (7,5)\,.$$

Zyklenpartition bzw. Zyklendarstellung von f:

$$Z = (1,8,4,2)\,(6,9,3)\,(7,5)\,.$$

4.6 VA 4, Gruppen und Untergruppen

Sei $S' = \langle S, \circ \rangle$ eine Halbgruppe.
Dann nennen wir ein Element $x \in S$ vertauschbar bezüglich $\circ$, falls gilt

$$(\forall a \in S)\,[\,a \circ x = x \circ a]\,.$$

Es sei $V(S)$ die Menge aller bezüglich $\circ$ vertauschbarer Elemente von S.

1. Zeigen Sie die Abgeschlossenheit von $V(S)$ unter der Verknüpfung $\circ$, d. h.:

$$x, y \in V(S) \Longrightarrow x \circ y \in V(S)\,.$$

Lösung:

Seien $x, y \in V(S)$.
Zu zeigen ist

$$(\forall a \in S)\,[a \circ (x \circ y) = (x \circ y) \circ a]\,.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} a \circ (x \circ y) &= (a \circ x) \circ y \\ &= (x \circ a) \circ y \\ &= x \circ (a \circ y) \\ &= x \circ (y \circ a) \\ &= (x \circ y) \circ a)\,. \end{aligned}$$

2. Nun nehmen wir an, dass S' eine Gruppe mit Einselement 1 ist.

   Zeigen Sie, dass die Unterhalbgruppe $\langle V(S), \circ_{V(S)} \rangle$ von S' dann ebenfalls eine Gruppe ist.

Lösung:

Wir zeigen die restlichen Abgeschlossenheitseigenschaften von $V(S)$, d. h., dass gilt

$$1 \in V(S), \text{ und}$$
$$x \in V(S) \implies x^{-1} \in V(S).$$

$1 \in V(S)$:

Ein Einselement ist mit allen Elementen vertauschbar, also folgt

$$a \circ 1 = 1 \circ a \quad \text{für alle } a \in S.$$

$x \in V(S) \Rightarrow x^{-1} \in V(S)$:

Aus $a \circ 1 = 1 \circ a$ folgt (Klammern können weggelassen werden)

$$\begin{aligned} a \circ x^{-1} \circ x &= x^{-1} \circ x \circ a \\ &= x^{-1} \circ a \circ x\,. \end{aligned}$$

Durch Multiplikation beider Seiten mit x^{-1} von rechts folgt die Gleichung

$$a \circ x^{-1} = x^{-1} \circ a\,.$$

3. Sei S' wieder eine Gruppe mit Einselement 1.

   Ist $V(S)$ ein Normalteiler von S' ? Begründung!

Antwort: Ja!

Begründung:
Offensichtlich gilt für alle $a \in S$

$$a \circ V(S) \;=\; V(S) \circ a\,.$$