Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2015
Übungsblatt 13
13. Juli 2015

Theoretische Informatik

Abgabetermin: Keine Abgabe

Hausaufgabe 1

1. Sei $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ definiert durch die Startwerte $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ zusammen mit der Rekursion

$$f(n) = f(n-1) \cdot f(n-3) \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}\,.$$

   Zeigen Sie die primitive Rekursivität der Funktion f, indem Sie die Erzeugungsregeln für primitiv-rekursive Funktionen zusammen mit einer Paarfunktion $p : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ und deren Umkehrfunktionen c_1 und c_2 anwenden. Kodieren Sie dabei $h(n) = p(p(f(n), f(n+1)), f(n+2))$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

   Hinweis : Sie dürfen zusätzlich zu den Basisfunktionen der primitiven Rekursion die folgenden Funktionen als primitiv-rekursiv annehmen: $plus(m, n)$ $(+)$, $times(m, n)$ $(\cdot)$, $p(m, n)$ und $c_1(n)$, $c_2(n)$. Sie dürfen die erweiterte Komposition und das erweiterte rekursive Definitionsschema benützen. LOOP- und WHILE-Programme sind **nicht** erlaubt.

2. Wir betrachten die Menge

$$F = \{w \in \{0, 1\}^* ;\ M_w \text{ berechnet } f\,\}\,.$$

   Sei $H_0 = \{w \in \{0, 1\}^* ; M_w \text{ hält auf leerem Band}\}$ das Halteproblem auf leerem Band. Zeigen Sie durch informelle Spezifikation einer Reduktionsabbildung g (wie in entsprechenden Beweisen der Vorlesung), dass H_0 reduzierbar ist auf F, i. Z. $H_0 \le F$.

Hausaufgabe 2

1. Sei $f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ gegeben durch $f(m, n) = m^2 \dot{-} n$.

   Zeigen Sie, dass μf primitiv-rekursiv ist.

2. Sei $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ total und μ-rekursiv, und sei $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ definiert durch die Startwerte $f(0) = 1$ und $f(1) = 2$ zusammen mit der Rekursion

$$f(n) = g(n) \cdot f(n-1) \cdot f(n-2) \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } n \ge 2\,.$$

   Zeigen Sie durch Anwendung der Erzeugungsregeln für μ-rekursive Funktionen mit Hilfe der Paarfunktion $p : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ und deren Umkehrfunktionen c_1 und c_2, dass f μ-rekursiv ist.

Hinweis:
Sie dürfen zusätzlich zu den Basisfunktionen der primitiven Rekursion die folgenden Funktionen als primitiv-rekursiv annehmen: $plus(m,n)$ $(+)$, $times(m,n)$ $(\cdot)$, $pred(n)$, $p(m,n)$, $c_1(n)$, $c_2(n)$, $ifthen(n,a,b)$ und die konstante k-stellige Funktion c_n^k. Sie dürfen die erweiterte Komposition und das erweiterte rekursive Definitionsschema benützen. LOOP- und WHILE-Programme sind nicht erlaubt.

Hausaufgabe 3

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ und $\prec$ die lexikographische Ordnung auf Wörtern über Σ, und $f : \mathbb{N}_0 \to \Sigma^*$ eine totale und berechenbare Funktion, so dass $L = f(\mathbb{N}_0) = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.
Zeigen Sie: Wenn f monoton ist (d.h. $m < n \implies f(m) \prec f(n)$), dann ist L entscheidbar.

Hausaufgabe 4

Wir betrachten die in der Vorlesung beschriebene Kodierung von Turingmaschinen durch Wörter über $\Sigma^* = \{0,1\}^*$. Für ein $w \in \Sigma^*$ beschreibt $\varphi_w : \Sigma^* \to \Sigma^*$ dann die Funktion, die durch die Turingmaschine M_w berechnet wird. Finden Sie informelle Beschreibungen für die folgenden Mengen:

1. $C = \{w \in \Sigma^* \,;\, \varphi_w(\epsilon) = w\}$.
2. $D = \{(u,v,w) \in \Sigma^* \times \Sigma^* \times \Sigma^* \,;\, \varphi_u(w) = \varphi_v(w)\}$.

Hausaufgabe 5

Sei $\Sigma = \{0,1\}$.

1. Wir betrachten das spezielle Halteproblem $K = \{w \in \Sigma^* \,;\, M_w[w]\downarrow\}$ und das Halteproblem auf leerem Band $H_0 = \{w \in \Sigma^* \,;\, M_w[\epsilon]\downarrow\}$.

   Zeigen Sie durch hinreichend genaue Spezifikation und Begründung einer Reduktionsabbildung (wie in den entsprechenden Beweisen der Vorlesung), dass H_0 reduzierbar ist auf K, d.h. $H_0 \leq K$.

2. Zeigen Sie, dass die Menge $R = \{w \in \Sigma^* \,;\, \varphi_w(0) = \perp\}$ unentscheidbar ist.
   Dabei sei φ_w diejenige (partielle) Funktion $\varphi_w : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, die von der Turingmaschine M_w berechnet wird.

Hausaufgabe 6

Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit der folgenden Mengen und wenden Sie zum Beweis Techniken der Reduzierbarkeit eines Problems A auf ein Problem B an.

1. $H_{\Sigma^*} = \{w \,;\, M_w$ hält für mindestens eine Eingabe$\}$.
2. $C = \{w \,;\, M_w$ berechnet die Funktion g mit $g(n) = 0$ für alle n$\}$.

Hausaufgabe 7

Wahr oder falsch? Begründen Sie im Folgenden Ihre Antworten möglichst knapp!

1. Das PCP $((01, 0), (10, 01), (0, 01))$ besitzt eine Lösung.
2. Wenn f berechenbar ist, dann ist $A_f := \{w \in \Sigma^* \,;\, f(w) \neq \perp\}$ semi-entscheidbar.
3. Für das spezielle Halteproblem $K = \{w \in \{0,1\}^* \,;\, M_w[w] \downarrow\}$ und eine beliebige Sprache A gilt: Wenn $K \cap A$ entscheidbar ist, dann ist A endlich.
4. Das Postsche Korrespondenzproblem ist semi-entscheidbar.
5. Für jede Turingmaschine M ist die Funktion

   $$f_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } M \text{ auf allen Eingaben hält} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   berechenbar.
6. Wenn f und g primitiv-rekursiv sind, und $f(x) = g(h(x))$ für alle x gilt, dann ist auch h primitiv-rekursiv.
7. Sei $A \subseteq \Sigma^*$. Wenn χ_A total ist, dann ist A entscheidbar.

Zusatzaufgabe 1 (Zur Wiederholung)

Die folgende Sprache $L \subseteq \{a, b, c\}^*$ ist nicht vom Typ 2, d.h., sie ist nicht kontextfrei:

$$L = \{a^i b^j c^k \,;\, i, j, k \in \mathbb{N},\, 0 < i < j < k\}\,.$$

1. Stellen Sie L als Durchschnitt kontextfreier Sprachen L_1 und L_2 dar.

   Zeigen Sie die Kontextfreiheit für die von Ihnen gewählten Sprachen L_1 und L_2.

2. Geben Sie eine monotone Grammatik G an, die L erzeugt.

   Hinweis: Monotone Grammatiken haben den Vorteil, dass man mit Produktionen $AB \to BA$ Zeichen in eine Richtung sortieren kann. Solche Produktionen kann man dann durch eine Kette von „kontextsensitiven“ monotonen Produktionen $\alpha A \beta \to \alpha\gamma\beta$ simulieren (siehe TA 2 von Blatt 1).

Zusatzaufgabe 2 (Zur Wiederholung)

1. Sei Σ ein Alphabet mit $\# \in \Sigma$. Geben Sie eine deterministische Turingmaschine B an, die die Menge $\{v \in \Sigma^* \,;\, \exists w \in (\Sigma \setminus \{\#\})^*.\ v = \#w\}$ akzeptiert.

2. Wir nennen eine Turingmaschine mit Eingabealphabet Σ und $\# \in \Sigma$ links-markiert, wenn sie sich auf Eingaben $\#w$ mit $w \in (\Sigma \setminus \{\#\})^*$ wie folgt verhält: Nach jedem Berechnungsschritt enthält das Band ein Wort lu mit $u \in (\Gamma \setminus \{\#\})^*$ und $l \in \{\#, \#\#\}$. Links und rechts von lu sei das Band mit Leerzeichen $\Box$ angefüllt.

   Sei $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$ mit $\# \notin \Gamma$ (und damit auch $\# \notin \Sigma$) eine deterministische Turingmaschine. Konstruieren Sie eine links-markierte Turingmaschine $T_\#$, so dass für die akzeptierten Sprachen gilt:

   $$L(T_\#) = \{\#w \,;\, w \in L(T)\}\,.$$

   Erläutern Sie Ihre Konstruktion!

   Hinweis: Beachten Sie, dass T an den Wortgrenzen ein Leerzeichen $\Box$ erwartet.

3. Modifizieren Sie Ihre Konstruktion in Punkt 2 derart, dass für die Zustandsmengen Q von T bzw. $Q_\#$ von $T_\#$ jedenfalls $|Q_\#| \leq |Q| + 10$ gilt.

   Hinweis: Im Gegensatz zu den Zustandsmengen ist Γ beliebig erweiterbar.

Zusatzaufgabe 3 (Zur Wiederholung)

Sei $\Sigma = \{*, \#\}$. Wir kodieren ganze Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ als Folge $** \ldots *$ der Länge n, d. h. $|** \ldots *| = n$, und stellen Paare $(x, y) \in \{*\}^* \times \{*\}^*$ als Wort $x\#y \in \Sigma^*$ dar.
Wir betrachten für $x, y, z \in \{*\}^*$ die Addition $|z| = |x| + |y|$.

1. Definieren Sie durch Angabe der Übergangsfunktion δ eine linear beschränkte Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$, die für $x, y, z \in \{*\}^*$ die Addition $|z| = |x| + |y|$ wie folgt durchführt:

   Startkonfiguration: $(\epsilon, q_0, x\#y)\,.$ Endkonfiguration: (ϵ, q_e, z), mit $q_e \in F\,.$

   Es gilt: $(\epsilon, q_0, x\#y) \underset{M}{\rightarrow}^* (\epsilon, q_e, z)\,.$

   Beschreiben Sie kurz die Konstruktionsidee für Ihre Maschine.

2. Seien c_1, c_2 die Umkehrfunktionen einer Paarfunktion $p : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$. Dann ist $plus : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $plus(n) = c_1(n) + c_2(n)$ die Kodierung der Addition nichtnegativer ganzer Zahlen, d.h., $x + y = plus(p(x, y))$ für alle $x, y \in \mathbb{N}_0$.

   Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit der folgenden Menge P:

$$P = \{w \in \{0,1\}^* \,;\, \text{die von } M_w \text{ berechnete Funktion ist gleich } plus\}\,.$$

3. Sei $H_0 = \{w \in \{0,1\}^* \,;\, M_w \text{ hält auf leerem Band}\}$ das Halteproblem auf leerem Band. Zeigen Sie durch informelle Spezifikation einer Reduktionsabbildung f (wie in entsprechenden Beweisen der Vorlesung), dass H_0 reduzierbar ist auf P, i. Z. $H_0 \leq P$.

Zusatzaufgabe 4 (Zur Wiederholung)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Falls eine Grammatik Chomsky-Normalform besitzt, dann enthält sie keine nutzlosen Variablen.

2. Falls $L \subseteq \Sigma^*$ deterministisch kontextfrei ist, dann gibt es eine $LR(k)$ Grammatik, die das Komplement $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$ erzeugt.

3. Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Das Komplement $\overline{H_s} = \Sigma^* \setminus H_s$ des speziellen Halteproblems H_s ist eine Typ-0-Sprache. (H_s wurde in Übungen auch als K bezeichnet.)

4. Die Menge $\{w \in \{0,1\}^* \,;\, \varphi_w \text{ ist } \mu\text{-rekursiv}\}$ ist entscheidbar. Dabei ist φ_w die von der Turingmaschine M_w berechnete Funktion.

Zusatzaufgabe 5 (Zur Wiederholung)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine nichtleere reguläre Sprache. Dann enthält der Rechtsquotient L/L das leere Wort ϵ.

2. Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$. Falls A auf B (effektiv) reduzierbar (wie in der Vorlesung definiert) und B regulär ist, dann ist auch A regulär.

3. Eine Sprache ist genau dann rekursiv aufzählbar (r.a., semi-entscheidbar), wenn sie vom Typ 0 ist.

4. Es ist entscheidbar, ob eine Turingmaschine M die Ackermann-Funktion berechnet.

5. Das allgemeine Halteproblem H ist semi-entscheidbar.

Zusatzaufgabe 6 (Zur Wiederholung)

Sei $\Sigma = \{b, \#, \mathsf{x}\}$; dabei heiße b *Buchstabe*, $\#$ *Zeilenendezeichen* und x *Löschzeichen*. Jedes Wort $w\# \in \Sigma^*$ heiße eine *Seite* über Σ. Ein Wort $w\# \in \Sigma^*$ heiße *Zeile*, falls $\#$ nicht in w vorkommt. Falls in w kein Buchstabe b vorkommt, dann heißt $w\#$ *Leerzeile*. Sei $\#_b(w)$ die Anzahl der b, die in w vorkommen. Ein Wort $s = z_0 z_1 \ldots z_m$ mit Zeilen z_i und $m \geq 0$ heiße *formatierte Seite*, falls $\#_b(z_0) = \#_b(z_i)$ für alle $i \leq m$ gilt.
Beispiel: das Wort $b\mathsf{x}b\#\mathsf{xx}b\mathsf{x}b\mathsf{x}\#bb\#$ ist eine formatierte Seite mit drei Zeilen. Die formatierte Seite $\mathsf{x}\#\#$ besteht aus zwei Leerzeilen.

1. Definieren Sie durch Angabe der Übergangsfunktion δ und der Menge F der Endzustände eine Turingmaschine $M_l = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$, die für alle Eingaben $e \in \Sigma^*$ hält, kein Zeichen auf dem Band überschreibt und die Menge S_l aller (formatierten) Seiten akzeptiert, die aus lauter Leerzeilen bestehen. Vor dem Start stehe der Kopf über dem ersten Zeichen und nach dem Halt stehe der Kopf über dem letzten Zeichen einer nicht leeren Eingabe.

   Geben Sie jeweils die Idee der Bedeutung der Zustände an.

2. Wir nehmen an, dass M_b eine Turingmaschine sei, die für alle Eingaben $e \in \Sigma^*$ hält, kein Zeichen auf dem Band überschreibt und die Menge S_b aller Seiten akzeptiert, die keine Leerzeilen enthalten. Vor dem Start stehe der Kopf über dem ersten Zeichen und nach dem Halt stehe der Kopf über dem letzten Zeichen einer nicht leeren Eingabe.

   Die Menge S_f der formatierten Seiten über Σ ist keine Sprache vom Typ 2, d.h. S_f ist nicht kontextfrei. Beschreiben Sie eine auf M_l und M_b gestützte Konstruktionsidee für eine linear beschränkte Turingmaschine M_f, die S_f akzeptiert.