Approximation unabhängiger Mengen in Graphen mit dem Greedy Algorithmus

Matthias Baumgart
matthias.baumgart@informatik.tu-chemnitz.de

Chemnitz, 16. Juli 2003

Gliederung

1. Der MIN-Greedy Algorithmus

Gliederung

Gliederung

Gliederung

1. Der MIN-Greedy Algorithmus
   1.1. Absolute Größe einer Lösung
   1.2. Relative Größe einer Lösung
2. Analyse der Güte des MIN-Greedy

Gliederung

1. Der MIN-Greedy Algorithmus
   1.1. Absolute Größe einer Lösung
   1.2. Relative Größe einer Lösung
2. Analyse der Güte des MIN-Greedy
3. Der MAX-Greedy Algorithmus

Der MIN-Greedy Algorithmus

MIN-Greedy$(G = (V, E))$

$I := \emptyset$

Der MIN-Greedy Algorithmus

MIN-Greedy$(\boldsymbol{G = (V, E)})$

$I := \emptyset$

`while` $G \neq \emptyset$ `do`

Der MIN-Greedy Algorithmus

MIN-Greedy$(\boldsymbol{G = (V, E)})$

$I := \emptyset$

`while` $G \neq \emptyset$ `do`

`wähle` $v \in V$ `mit` $d(v) = \min_{w \in V} \{d(w)\}$

Der MIN-Greedy Algorithmus

MIN-Greedy$(\boldsymbol{G = (V, E)})$

$I := \emptyset$

`while` $G \neq \emptyset$ `do`

`wähle` $v \in V$ `mit` $d(v) = \min_{w \in V} \{d(w)\}$

$I := I \cup \{v\}$

Der MIN-Greedy Algorithmus

MIN-Greedy$(\boldsymbol{G = (V, E)})$

$I := \emptyset$

`while` $G \neq \emptyset$ `do`

`wähle` $v \in V$ `mit` $d(v) = \min_{w \in V} \{d(w)\}$

$I := I \cup \{v\}$

$G := G \setminus \{\{v\} \cup N(v)\}$

Der MIN-Greedy Algorithmus

MIN-Greedy$(\boldsymbol{G = (V, E)})$

$I := \emptyset$

`while` $G \neq \emptyset$ `do`

`wähle` $v \in V$ `mit` $d(v) = \min_{w \in V} \{d(w)\}$

$I := I \cup \{v\}$

$G := G \setminus \{\{v\} \cup N(v)\}$

`Ausgabe` I

Absolute Größe einer MIN-Greedy Lösung

Satz 1 *Sei* $\overline{d}$ *der durchschnittliche Knotengrad eines Graphen* $G = (V, E)$*. Dann liefert MIN-Greedy*(G) *eine unabhängige Menge* I *mit*

$$|I| \geq \frac{n}{\overline{d} + 1} \,.$$

Absolute Größe einer MIN-Greedy Lösung

Satz 1 *Sei* $\overline{d}$ *der durchschnittliche Knotengrad eines Graphen* $G = (V, E)$*. Dann liefert MIN-Greedy*(G) *eine unabhängige Menge* I *mit*

$$|I| \geq \frac{n}{\overline{d} + 1}\ .$$

Beweis:

- sei t die Anzahl Iterationen und

Absolute Größe einer MIN-Greedy Lösung

Satz 1 *Sei* $\overline{d}$ *der durchschnittliche Knotengrad eines Graphen* $G = (V, E)$*. Dann liefert MIN-Greedy*(G) *eine unabhängige Menge* I *mit*

$$|I| \geq \frac{n}{\overline{d} + 1} \; .$$

Beweis:

- sei t die Anzahl Iterationen und

- d_i der Grad des Knotens, der im i'ten Schritt gewählt wurde

Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{t} (d_i + 1) = n \; . \tag{1}$$

Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{t} (d_i + 1) = n \ . \tag{1}$$

Summe der Knotengrade wird mindestens um $d_i(d_i + 1)$ kleiner.

Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{t} (d_i + 1) = n \ . \tag{1}$$

Summe der Knotengrade wird mindestens um $d_i(d_i + 1)$ kleiner.

Für die Anzahl Kanten gilt

$$\frac{\overline{d} \cdot n}{2} = |E| \geq \sum_{i=1}^{t} \binom{d_i + 1}{2} \ . \tag{2}$$

Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{t} (d_i + 1) = n \; . \tag{1}$$

Summe der Knotengrade wird mindestens um $d_i(d_i + 1)$ kleiner.

Für die Anzahl Kanten gilt

$$\frac{\overline{d} \cdot n}{2} = |E| \geq \sum_{i=1}^{t} \binom{d_i + 1}{2} \; . \tag{2}$$

Addiere (1) und zweimal (2) und erhalte

$$(\overline{d} + 1)n \geq \sum_{i=1}^{t} (d_i + 1)^2 \; .$$

Anwenden von Cauchy-Schwarz liefert

$$(\overline{d}+1)n \geq \frac{n^2}{t} \ ,$$

Anwenden von Cauchy-Schwarz liefert

$$(\overline{d}+1)n \geq \frac{n^2}{t} \ ,$$

also nach t umgestellt

$$t \geq \frac{n}{\overline{d}+1} \ . \qquad \square$$

Relative Größe einer MIN-Greedy Lösung (1)

Betrachte die erhaltene Lösung als Funktion von $\tau = \alpha/n$, wobei α die Unabhängigkeitszahl ist.

Relative Größe einer MIN-Greedy Lösung (1)

Betrachte die erhaltene Lösung als Funktion von $\tau = \alpha/n$, wobei α die Unabhängigkeitszahl ist.

Satz 2 *Sei $\overline{d}$ der durchschnittliche Knotengrad eines Graphen $G = (V, E)$. Dann liefert MIN-Greedy(G) eine Menge I mit*

$$|I| \geq \frac{1+\tau^2}{\overline{d}+1+\tau} n \,.$$

Beweis:

- sei I_{max} eine beliebige – aber feste – unabhängige Menge von G mit $|I_{max}| = \alpha$ und

Beweis:

- sei I_{max} eine beliebige – aber feste – unabhängige Menge von G mit $|I_{max}| = \alpha$ und

- k_i die Anzahl Knoten, die im Schritt i gelöscht werden und zu I_{max} gehören

Beweis:

- sei I_{max} eine beliebige – aber feste – unabhängige Menge von G mit $|I_{max}| = \alpha$ und

- k_i die Anzahl Knoten, die im Schritt i gelöscht werden und zu I_{max} gehören

Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{t} k_i = \alpha \ . \tag{3}$$

Da zwischen den k_i Knoten aus I_{max} keine Kanten verlaufen gilt

$$\frac{\overline{d} \cdot n}{2} = |E| \geq \sum_{i=1}^{t} \left(\binom{d_i + 1}{2} + \binom{k_i}{2} \right) . \tag{4}$$

Da zwischen den k_i Knoten aus I_{max} keine Kanten verlaufen gilt

$$\frac{\overline{d} \cdot n}{2} = |E| \geq \sum_{i=1}^{t} \left(\binom{d_i + 1}{2} + \binom{k_i}{2} \right) . \tag{4}$$

Addiere (1), (3) und zweimal (4) und erhalte

$$n + \alpha + 2 \cdot \left(\frac{\overline{d} \cdot n}{2} \right) \geq \sum_{i=1}^{t} (d_i + 1) + \sum_{i=1}^{t} k_i + 2 \cdot \sum_{i=1}^{t} \left(\binom{d_i + 1}{2} + \binom{k_i}{2} \right)$$

Da zwischen den k_i Knoten aus I_{max} keine Kanten verlaufen gilt

$$\frac{\overline{d} \cdot n}{2} = |E| \geq \sum_{i=1}^{t} \left(\binom{d_i + 1}{2} + \binom{k_i}{2} \right) . \tag{4}$$

Addiere (1), (3) und zweimal (4) und erhalte

$$\begin{aligned} n + \alpha + 2 \cdot \left(\frac{\overline{d} \cdot n}{2} \right) \quad &\geq \quad \sum_{i=1}^{t} (d_i + 1) + \sum_{i=1}^{t} k_i + 2 \cdot \sum_{i=1}^{t} \left(\binom{d_i + 1}{2} + \binom{k_i}{2} \right) \\ &= \quad \sum_{i=1}^{t} (d_i + 1)^2 + \sum_{i=1}^{t} k_i^2 \, . \end{aligned}$$

Anwenden von Cauchy-Schwarz liefert

$$\alpha + n + \overline{d} \cdot n \geq \frac{n^2 + \alpha^2}{t} \ .$$

Anwenden von Cauchy-Schwarz liefert

$$\alpha + n + \bar{d} \cdot n \geq \frac{n^2 + \alpha^2}{t} \ .$$

Ersetzen von α durch τn und umstellen nach t ergibt

$$t \geq \frac{1 + \tau^2}{\bar{d} + 1 + \tau} n \ . \qquad \square$$

Relative Größe einer MIN-Greedy Lösung (2)

Satz 3 *Sei Δ der maximale Grad eines Graphen $G = (V, E)$. Dann liefert MIN-Greedy(G) eine Menge I mit*

$$|I| \geq \frac{1 - \tau(1 - \tau)}{(1 - \tau)\Delta + 1} n \, .$$

Relative Größe einer MIN-Greedy Lösung (2)

Satz 3 *Sei* Δ *der maximale Grad eines Graphen* $G = (V, E)$*. Dann liefert MIN-Greedy*(G) *eine Menge* I *mit*

$$|I| \geq \frac{1 - \tau(1 - \tau)}{(1 - \tau)\Delta + 1} n \, .$$

Beweis:

- im i'ten Schritt wird ein Knoten $v \in V$ gewählt

Relative Größe einer MIN-Greedy Lösung (2)

Satz 3 *Sei Δ der maximale Grad eines Graphen $G = (V, E)$. Dann liefert MIN-Greedy(G) eine Menge I mit*

$$|I| \geq \frac{1 - \tau(1-\tau)}{(1-\tau)\Delta + 1} n \; .$$

Beweis:

- im i'ten Schritt wird ein Knoten $v \in V$ gewählt

- sei $N(v) \subseteq V$ die Nachbarschaft von v

Relative Größe einer MIN-Greedy Lösung (2)

Satz 3 *Sei Δ der maximale Grad eines Graphen $G = (V, E)$. Dann liefert MIN-Greedy(G) eine Menge I mit*

$$|I| \geq \frac{1 - \tau(1 - \tau)}{(1 - \tau)\Delta + 1} n \; .$$

Beweis:

- im i'ten Schritt wird ein Knoten $v \in V$ gewählt

- sei $N(v) \subseteq V$ die Nachbarschaft von v

- setze $D_i := \{v \cup N(v)\}$

Teile die gelöschten Kanten in 3 Gruppen:

Teile die gelöschten Kanten in 3 Gruppen:

1. Kanten besitzen genau einen Endpunkt in D_i (Anzahl a_i).

Teile die gelöschten Kanten in 3 Gruppen:

1. Kanten besitzen genau einen Endpunkt in D_i (Anzahl a_i).

2. Kanten mit beiden Endpunkten in D_i, wobei ein Endpunkt in I_{max} und der andere außerhalb von I_{max} liegt (Anzahl b_i).

Teile die gelöschten Kanten in 3 Gruppen:

1. Kanten besitzen genau einen Endpunkt in D_i (Anzahl a_i).

2. Kanten mit beiden Endpunkten in D_i, wobei ein Endpunkt in I_{max} und der andere außerhalb von I_{max} liegt (Anzahl b_i).

3. Kanten mit beiden Endpunkten in D_i, wobei beide Endpunkte in $D_i \setminus I_{max}$ liegen (Anzahl c_i).

Teile die gelöschten Kanten in 3 Gruppen:

1. Kanten besitzen genau einen Endpunkt in D_i (Anzahl a_i).
2. Kanten mit beiden Endpunkten in D_i, wobei ein Endpunkt in I_{max} und der andere außerhalb von I_{max} liegt (Anzahl b_i).
3. Kanten mit beiden Endpunkten in D_i, wobei beide Endpunkte in $D_i \setminus I_{max}$ liegen (Anzahl c_i).

Es gilt

$$a_i + 2(b_i + c_i) \quad \geq \quad d_i(d_i + 1)$$

Teile die gelöschten Kanten in 3 Gruppen:

1. Kanten besitzen genau einen Endpunkt in D_i (Anzahl a_i).
2. Kanten mit beiden Endpunkten in D_i, wobei ein Endpunkt in I_{max} und der andere außerhalb von I_{max} liegt (Anzahl b_i).
3. Kanten mit beiden Endpunkten in D_i, wobei beide Endpunkte in $D_i \setminus I_{max}$ liegen (Anzahl c_i).

Es gilt

$$\begin{aligned} a_i + 2(b_i + c_i) &\geq d_i(d_i + 1) \\ b_i &\leq k_i(d_i + 1 - k_i) \ , \end{aligned}$$

also

$$a_i + b_i + 2c_i \geq \binom{d_i + 1}{2} + \binom{k_i}{2} + \binom{d_i - k_1 + 1}{2}\,.$$

also

$$a_i + b_i + 2c_i \geq \binom{d_i + 1}{2} + \binom{k_i}{2} + \binom{d_i - k_1 + 1}{2} .$$

Für die Anzahl Kanten gilt

$$|E| = \sum_{i=1}^{t}(a_i + b_i + c_i) \geq \sum_{i=1}^{t}\left(\binom{d_i}{2} + \binom{k_i}{2} + \binom{d_i + 1 - k_i}{2} - c_i\right) . \qquad (5)$$

also

$$a_i + b_i + 2c_i \geq \binom{d_i + 1}{2} + \binom{k_i}{2} + \binom{d_i - k_1 + 1}{2} .$$

Für die Anzahl Kanten gilt

$$|E| = \sum_{i=1}^{t} (a_i + b_i + c_i) \geq \sum_{i=1}^{t} \left(\binom{d_i}{2} + \binom{k_i}{2} + \binom{d_i + 1 - k_i}{2} - c_i \right) . \qquad (5)$$

Summe der Grade aller Knoten außerhalb von I_{max} ist höchstens $(n - \alpha)\Delta$:

$$(n - \alpha)\Delta \geq |E| + \sum_{i=1}^{t} c_i . \qquad (6)$$

(5), (6) und (1) ergibt

$$2(n-\alpha)\Delta + 2n \geq \sum_{i=1}^{t} \left((d_i+1)^2 + k_i^2 + (d_i+1-k_i)^2\right) \ . \qquad (7)$$

(5), (6) und (1) ergibt

$$2(n-\alpha)\Delta + 2n \geq \sum_{i=1}^{t} \left((d_i+1)^2 + k_i^2 + (d_i+1-k_i)^2\right) \ . \qquad (7)$$

Anwenden von Cauchy-Schwarz und umstellen nach t führt zur Behauptung

$$t \geq \frac{1-\tau(1-\tau)}{(1-\tau)\Delta+1} n \ .$$

□

Analyse der Güte R_{Gr}

Sei

$$t_{d,k} = |\{i\colon d_i = d \text{ und } k_i = k\}|$$

für $d = 0, 1, \ldots, \Delta$ und $k = 0, 1, \ldots, \Delta$.

Analyse der Güte R_{Gr}

Sei

$$t_{d,k} = |\{i\colon d_i = d \text{ und } k_i = k\}|$$

für $d = 0, 1, \ldots, \Delta$ und $k = 0, 1, \ldots, \Delta$.

Damit gilt für (1), (3) und (7):

$$\sum_{d,k} (d+1) t_{d,k} = n \tag{8}$$

$$\sum_{d,k} k t_{d,k} = \alpha \tag{9}$$

$$\sum_{d,k} \left((d+1)^2 + k^2 + (d+1-k)^2\right) t_{d,k} \leq 2n(\Delta+1) - 2\Delta\alpha\,. \tag{10}$$

Satz 4 *Sei Δ der maximale Grad des Graphen $G = (V, E)$. Dann gilt für die Güte des MIN-Greedy*

$$R_{Gr} \leq \frac{\Delta + 2}{3}\ .$$

Satz 4 *Sei Δ der maximale Grad des Graphen $G = (V, E)$. Dann gilt für die Güte des MIN-Greedy*

$$R_{Gr} \leq \frac{\Delta + 2}{3} \, .$$

Beweis:

Unterscheide zwei Fälle:

Satz 4 *Sei Δ der maximale Grad des Graphen $G = (V, E)$. Dann gilt für die Güte des MIN-Greedy*

$$R_{Gr} \leq \frac{\Delta + 2}{3} \, .$$

Beweis:

Unterscheide zwei Fälle:

1. $\Delta \equiv 0, 1 \bmod 3$

Satz 4 *Sei Δ der maximale Grad des Graphen $G = (V, E)$. Dann gilt für die Güte des MIN-Greedy*

$$R_{Gr} \leq \frac{\Delta + 2}{3} \; .$$

Beweis:

Unterscheide zwei Fälle:

1. $\Delta \equiv 0, 1 \bmod 3$

2. $\Delta \equiv -1 \bmod 3$

1. Fall: Multipliziere (10) mit -1 und addiere dazu das $2(\Delta + 1)$-fache von (8):

$$\sum_{d,k} \Big[2(\Delta + 1)(d + 1) - \Big((d + 1)^2 + k^2 + (d + 1 - k)^2\Big)\Big] \geq 2\Delta\alpha \; .$$

1. Fall: Multipliziere (10) mit -1 und addiere dazu das $2(\Delta+1)$-fache von (8):

$$\sum_{d,k}\left[2(\Delta+1)(d+1)-\left((d+1)^2+k^2+(d+1-k)^2\right)\right]\geq 2\Delta\alpha\ .$$

Setze

$$B(d) \quad = \quad \min_k\{(d+1)^2+k^2+(d+1-k)^2\}$$

1. Fall: Multipliziere (10) mit -1 und addiere dazu das $2(\Delta+1)$-fache von (8):

$$\sum_{d,k}\left[2(\Delta+1)(d+1)-\left((d+1)^2+k^2+(d+1-k)^2\right)\right]\geq 2\Delta\alpha\ .$$

Setze

$$\begin{aligned}B(d) &= \min_k\{(d+1)^2+k^2+(d+1-k)^2\}\\ C(d) &= 2(d+1)(\Delta+1)-B(d)\ .\end{aligned}$$

1. Fall: Multipliziere (10) mit -1 und addiere dazu das $2(\Delta+1)$-fache von (8):

$$\sum_{d,k}\left[2(\Delta+1)(d+1)-\left((d+1)^2+k^2+(d+1-k)^2\right)\right]\geq 2\Delta\alpha\ .$$

Setze

$$\begin{aligned} B(d) &= \min_k\{(d+1)^2+k^2+(d+1-k)^2\} \\ C(d) &= 2(d+1)(\Delta+1)-B(d)\ . \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\sum_{d,k} C(d)t_{d,k}\geq 2\Delta\alpha\ .$$

1. Fall: Multipliziere (10) mit -1 und addiere dazu das $2(\Delta+1)$-fache von (8):

$$\sum_{d,k}\left[2(\Delta+1)(d+1)-\left((d+1)^2+k^2+(d+1-k)^2\right)\right]\geq 2\Delta\alpha\ .$$

Setze

$$\begin{aligned} B(d) &= \min_k\{(d+1)^2+k^2+(d+1-k)^2\} \\ C(d) &= 2(d+1)(\Delta+1)-B(d)\ . \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\sum_{d,k} C(d)t_{d,k}\geq 2\Delta\alpha\ .$$

Im folgenden wird nun $C(d)\leq 2\Delta\frac{\Delta+2}{3}$ gezeigt, womit die Behauptung für Fall 1 bewiesen ist.

Eine einfache Rechnung ergibt

$$B(d) = \begin{cases} \frac{3}{2}(d+1)^2 & \text{falls } d \text{ ungerade} \\ \frac{3}{2}(d+1)^2 + \frac{1}{2} & \text{falls } d \text{ gerade} \end{cases} \quad .$$

Eine einfache Rechnung ergibt

$$B(d) = \begin{cases} \frac{3}{2}(d+1)^2 & \text{falls } d \text{ ungerade} \\ \frac{3}{2}(d+1)^2 + \frac{1}{2} & \text{falls } d \text{ gerade} \end{cases} .$$

Definiere zwei Funktionen $f_0\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $f_1\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 2x(\Delta+1) - \frac{3}{2}x^2 \\ f_1(x) &= 2x(\Delta+1) - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} = f_0(x) - \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

Eine einfache Rechnung ergibt

$$B(d) = \begin{cases} \frac{3}{2}(d+1)^2 & \text{falls } d \text{ ungerade} \\ \frac{3}{2}(d+1)^2 + \frac{1}{2} & \text{falls } d \text{ gerade} \end{cases} .$$

Definiere zwei Funktionen $f_0\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $f_1\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 2x(\Delta+1) - \frac{3}{2}x^2 \\ f_1(x) &= 2x(\Delta+1) - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} = f_0(x) - \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

Dann erhält man

$$C(d) = \begin{cases} f_0(d+1) & \text{falls } d \text{ ungerade} \\ f_1(d+1) & \text{falls } d \text{ gerade} \end{cases} .$$

Bestimmung des Maximums der Funktionen $f_0(x)$ und $f_1(x)$:

Bestimmung des Maximums der Funktionen $f_0(x)$ und $f_1(x)$:

$$
\begin{aligned}
f_0'(x) &= -3x + 2(\Delta + 1) \\
f_0''(x) &= -3 \\
f_1'(x) &= -3x + 2(\Delta + 1) \\
f_1''(x) &= -3\ .
\end{aligned}
$$

Bestimmung des Maximums der Funktionen $f_0(x)$ und $f_1(x)$:

$$\begin{aligned} f_0'(x) &= -3x + 2(\Delta + 1) \\ f_0''(x) &= -3 \\ f_1'(x) &= -3x + 2(\Delta + 1) \\ f_1''(x) &= -3\ . \end{aligned}$$

Nullstelle der ersten Ableitung

$$x_0 = \frac{2(\Delta + 1)}{3}\ .$$

Bestimmung des Maximums der Funktionen $f_0(x)$ und $f_1(x)$:

$$\begin{aligned}
f_0'(x) &= -3x + 2(\Delta + 1) \\
f_0''(x) &= -3 \\
f_1'(x) &= -3x + 2(\Delta + 1) \\
f_1''(x) &= -3 \,.
\end{aligned}$$

Nullstelle der ersten Ableitung

$$x_0 = \frac{2(\Delta + 1)}{3} \,.$$

Sei x_{odd} die am nächsten zu x_0 liegende ungerade ganze Zahl und x_{even} die am nächsten zu x_0 liegende gerade ganze Zahl.

Dann muss

$$
\begin{aligned}
f_0(x_{even}) &\leq 2\Delta\frac{\Delta+2}{3} \\
f_1(x_{odd}) &\leq 2\Delta\frac{\Delta+2}{3}
\end{aligned}
$$

gelten.

Dann muss

$$\begin{aligned} f_0(x_{even}) &\leq 2\Delta\frac{\Delta+2}{3} \\ f_1(x_{odd}) &\leq 2\Delta\frac{\Delta+2}{3} \end{aligned}$$

gelten.

Nach Voraussetzung gilt $\Delta \equiv 0, 1 \bmod 3$, also

$$\Delta + 1 = 3r + s \qquad s \in \{\pm 1\}$$

und

$$x_0 = \frac{2(3r+s)}{3} = 2r + \frac{1}{3}s\ .$$

Damit sind x_{odd} und x_{even} eindeutig bestimmt:

Damit sind x_{odd} und x_{even} eindeutig bestimmt:

$$\begin{aligned} x_{odd} &= 2r + s \\ x_{even} &= 2r \ . \end{aligned}$$

Damit sind x_{odd} und x_{even} eindeutig bestimmt:

$$\begin{aligned} x_{odd} &= 2r + s \\ x_{even} &= 2r \ . \end{aligned}$$

Dies setzt man nun in f_0 bzw. f_1 ein und erhält

$$f_0(2r) = f_1(2r + s) = 6r^2 + 4rs \ .$$

Damit sind x_{odd} und x_{even} eindeutig bestimmt:

$$\begin{aligned} x_{odd} &= 2r + s \\ x_{even} &= 2r \;. \end{aligned}$$

Dies setzt man nun in f_0 bzw. f_1 ein und erhält

$$f_0(2r) = f_1(2r + s) = 6r^2 + 4rs \;.$$

Setzt man $r = \frac{\Delta+1-s}{3}$ ein ergibt dies

$$f_0(2r) = f_1(2r + s) = \frac{2\Delta(\Delta + 2)}{3} \;.$$

Damit sind x_{odd} und x_{even} eindeutig bestimmt:

$$\begin{aligned} x_{odd} &= 2r + s \\ x_{even} &= 2r \ . \end{aligned}$$

Dies setzt man nun in f_0 bzw. f_1 ein und erhält

$$f_0(2r) = f_1(2r + s) = 6r^2 + 4rs \ .$$

Setzt man $r = \frac{\Delta+1-s}{3}$ ein ergibt dies

$$f_0(2r) = f_1(2r + s) = \frac{2\Delta(\Delta + 2)}{3} \ .$$

Damit ist Fall 1 bewiesen.

2. Fall: Multipliziere (10) mit -1 und addiere dazu das zweifache von (9) und das $2(\Delta+1)$-fache von (8):

$$\sum_{d,k} \left(2(\Delta+1)(d+1) + 2k - (d+1)^2 - k^2 - (d+1-k)^2\right) t_{d,k} \geq (2+2\Delta)\alpha$$

2. Fall: Multipliziere (10) mit -1 und addiere dazu das zweifache von (9) und das $2(\Delta + 1)$-fache von (8):

$$\sum_{d,k} \left(2(\Delta+1)(d+1) + 2k - (d+1)^2 - k^2 - (d+1-k)^2\right) t_{d,k} \geq (2+2\Delta)\alpha$$

Setze $C(d,k)$ wie folgt

$$C(d,k) \quad = \quad 2(\Delta+1)(d+1) + 2k - (d+1)^2 - k^2 - (d+1-k)^2$$

2. Fall: Multipliziere (10) mit -1 und addiere dazu das zweifache von (9) und das $2(\Delta+1)$-fache von (8):

$$\sum_{d,k} \left(2(\Delta+1)(d+1) + 2k - (d+1)^2 - k^2 - (d+1-k)^2\right) t_{d,k} \geq (2+2\Delta)\alpha$$

Setze $C(d,k)$ wie folgt

$$\begin{aligned} C(d,k) &= 2(\Delta+1)(d+1) + 2k - (d+1)^2 - k^2 - (d+1-k)^2 \\ &= 2(d+1)(\Delta-d) + 2k(2+d-k)\ . \end{aligned}$$

2. Fall: Multipliziere (10) mit -1 und addiere dazu das zweifache von (9) und das $2(\Delta+1)$-fache von (8):

$$\sum_{d,k} \left(2(\Delta+1)(d+1) + 2k - (d+1)^2 - k^2 - (d+1-k)^2\right) t_{d,k} \geq (2+2\Delta)\alpha$$

Setze $C(d,k)$ wie folgt

$$\begin{aligned} C(d,k) &= 2(\Delta+1)(d+1) + 2k - (d+1)^2 - k^2 - (d+1-k)^2 \\ &= 2(d+1)(\Delta-d) + 2k(2+d-k)\ . \end{aligned}$$

Also gilt

$$\sum_{d,k} C(d,k) t_{d,k} \geq 2(\Delta+1)\alpha\ . \tag{11}$$

Definiere zwei Funktionen $f_0\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $f_1\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 2(x+1)(\Delta - x) + \frac{1}{2}(x+2)^2 - \frac{1}{2} \\ f_1(x) &= 2(x+1)(\Delta - x) + \frac{1}{2}(x+2)^2 \,. \end{aligned}$$

Definiere zwei Funktionen $f_0\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $f_1\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
f_0(x) &= 2(x+1)(\Delta - x) + \frac{1}{2}(x+2)^2 - \frac{1}{2} \\
f_1(x) &= 2(x+1)(\Delta - x) + \frac{1}{2}(x+2)^2 \,.
\end{aligned}
$$

Es gilt

$$
C(d) = \max_k C(d,k) = \begin{cases} f_0(d) & d \text{ ungerade} \\ f_1(d) & d \text{ gerade}\,. \end{cases}
$$

Leite $f_0(x)$ und $f_1(x)$ zur Bestimmung des Maximums von $C(d)$ zweimal ab:

Leite $f_0(x)$ und $f_1(x)$ zur Bestimmung des Maximums von $C(d)$ zweimal ab:

$$
\begin{aligned}
f_0'(x) &= -3x + 2\Delta \\
f_0''(x) &= -3 \\
f_1'(x) &= -3x + 2\Delta \\
f_1''(x) &= -3\,.
\end{aligned}
$$

Leite $f_0(x)$ und $f_1(x)$ zur Bestimmung des Maximums von $C(d)$ zweimal ab:

$$
\begin{aligned}
f_0'(x) &= -3x + 2\Delta \\
f_0''(x) &= -3 \\
f_1'(x) &= -3x + 2\Delta \\
f_1''(x) &= -3 \,.
\end{aligned}
$$

Die Nullstelle der ersten Ableitungen liegt bei

$$x_0 = \frac{2}{3}\Delta \,.$$

Bestimme wieder x_{even} und x_{odd}:

Bestimme wieder x_{even} und x_{odd}:

$$x_{even} = 2\frac{\Delta + 1}{3}$$

Bestimme wieder x_{even} und x_{odd}:

$$\begin{aligned} x_{even} &= 2\frac{\Delta + 1}{3} \\ x_{odd} &= 2\frac{\Delta + 1}{3} - 1 = \frac{2\Delta - 1}{3}\ . \end{aligned}$$

Bestimme wieder x_{even} und x_{odd}:

$$\begin{aligned} x_{even} &= 2\frac{\Delta + 1}{3} \\ x_{odd} &= 2\frac{\Delta + 1}{3} - 1 = \frac{2\Delta - 1}{3} \,. \end{aligned}$$

Dies setzt man nun in f_0 bzw. f_1 ein und erhält

$$f_0\left(\frac{2\Delta - 1}{3}\right) = f_1\left(\frac{2(\Delta + 1)}{3}\right) = \frac{2}{3}(\Delta + 1)(\Delta + 2) \,.$$

Bestimme wieder x_{even} und x_{odd}:

$$\begin{aligned} x_{even} &= 2\frac{\Delta+1}{3} \\ x_{odd} &= 2\frac{\Delta+1}{3} - 1 = \frac{2\Delta-1}{3} \,. \end{aligned}$$

Dies setzt man nun in f_0 bzw. f_1 ein und erhält

$$f_0\left(\frac{2\Delta-1}{3}\right) = f_1\left(\frac{2(\Delta+1)}{3}\right) = \frac{2}{3}(\Delta+1)(\Delta+2) \,.$$

Damit gilt

$$C(d,k) \leq C(d) = \frac{2}{3}(\Delta+1)(\Delta+2)$$

und wir können (11) wie folgt abschätzen:

$$\sum_{d,k} C(d,k) t_{d,k} \;\; \geq \;\; 2(\Delta + 1)\alpha$$

und wir können (11) wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \sum_{d,k} C(d,k) t_{d,k} &\geq 2(\Delta+1)\alpha \\ \frac{1}{3}(\Delta+2)\cdot t &\geq \alpha\ . \end{aligned}$$

und wir können (11) wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \sum_{d,k} C(d,k) t_{d,k} &\geq 2(\Delta + 1)\alpha \\ \frac{1}{3}(\Delta + 2) \cdot t &\geq \alpha \ . \end{aligned}$$

Also gilt die Behauptung für den Fall $\Delta \equiv 2 \bmod 3$. $\square$

Der MAX-Greedy Algorithmus

MAX-Greedy$(\boldsymbol{G = (V, E)})$

`while` $E \neq \emptyset$ `do`

Der MAX-Greedy Algorithmus

MAX-Greedy$(\boldsymbol{G = (V, E)})$

`while` $E \neq \emptyset$ `do`

`wähle` $v \in V$ `mit` $d(v) = \max_{w \in V} \{d(w)\}$

Der MAX-Greedy Algorithmus

MAX-Greedy$(\boldsymbol{G = (V, E)})$

```
while E ≠ ∅ do
  wähle v ∈ V mit d(v) = max_{w∈V} {d(w)}
  V := V \ {v}
```

$\texttt{while}\ E \neq \emptyset\ \texttt{do}$

$\quad \texttt{wähle}\ v \in V\ \texttt{mit}\ d(v) = \max_{w \in V} \{d(w)\}$

$\quad V := V \setminus \{v\}$

Der MAX-Greedy Algorithmus

MAX-Greedy$(\boldsymbol{G = (V, E)})$

`while` $E \neq \emptyset$ `do`

`wähle` $v \in V$ `mit` $d(v) = \max_{w \in V} \{d(w)\}$

$V := V \setminus \{v\}$

$E := E \setminus \{\{v, w\} \colon w \in N(v)\}$

Der MAX-Greedy Algorithmus

MAX-Greedy$(\boldsymbol{G = (V, E)})$

```
while E ≠ ∅ do
  wähle v ∈ V mit d(v) = max_{w∈V} {d(w)}
  V := V \ {v}
  E := E \ {{v,w}: w ∈ N(v)}
I:=V
```

Der MAX-Greedy Algorithmus

MAX-Greedy$(\boldsymbol{G = (V, E)})$

`while` $E \neq \emptyset$ `do`

`wähle` $v \in V$ `mit` $d(v) = \max_{w \in V} \{d(w)\}$

$V := V \setminus \{v\}$

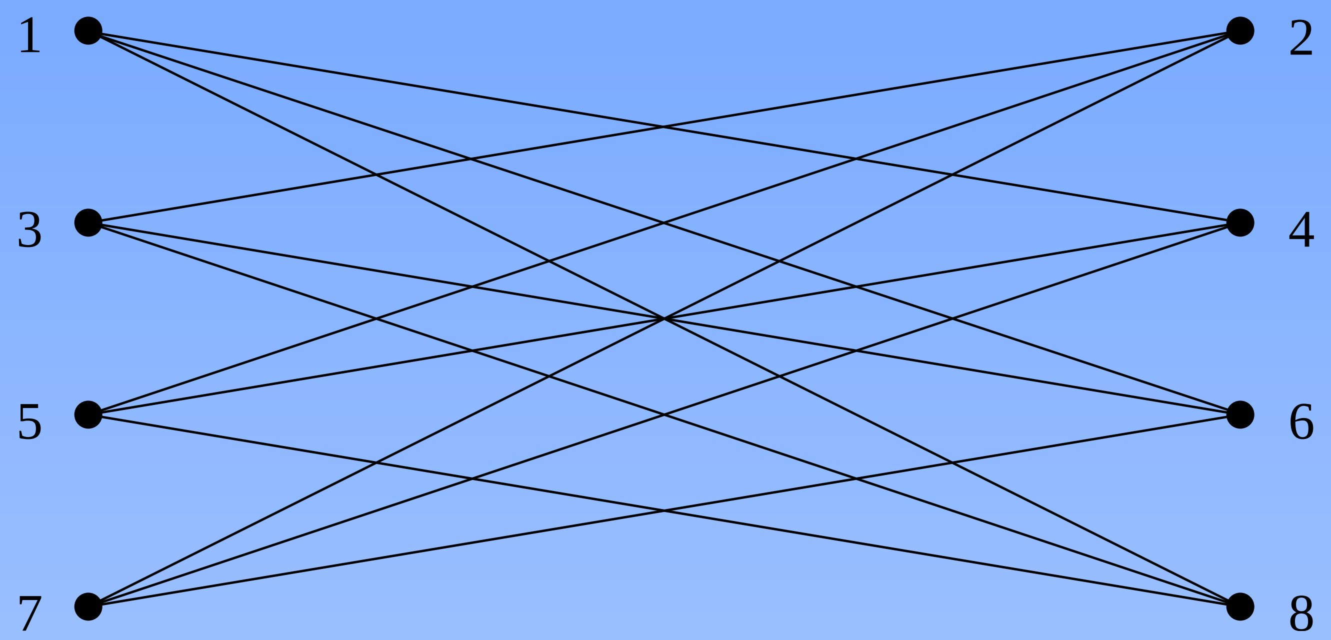
$E := E \setminus \{\{v, w\} : w \in N(v)\}$

`I:=V`

`Ausgabe` I

Beispiel

Bis auf ein perfektes Matching vollständiger bipartiter Graph $K_{4,4}$:



Literatur

[1] M. Halldórsson und J. Radhakrishnan, *Greed is Good: Approximating Independent Sets in Sparse and Bounded-degree Graphs*, Algorithmica, Springer Verlag, New York, 145-163, 1997

[2] J. R. Griggs, *Lower bounds on the independence number in terms of the degrees*, J. Combin. Theory Ser. B, 34:22-39, 1983