Approximation unabhängiger Mengen in Graphen mit dem Greedy Algorithmus

(Teil 2)

Matthias Baumgart
matthias.baumgart@informatik.tu-chemnitz.de

Chemnitz, 9. Dezember 2003

Gliederung

1. Der MIN-Greedy Algorithmus

Gliederung

1. Der MIN-Greedy Algorithmus

2. Die Güte des MIN-Greedy

Gliederung

1. Der MIN-Greedy Algorithmus

2. Die Güte des MIN-Greedy

    1.1. Obere Schranken

Gliederung

1. Der MIN-Greedy Algorithmus

2. Die Güte des MIN-Greedy

    1.1. Obere Schranken
    bezüglich des maximalen Knotengrades Δ

Gliederung

1. Der MIN-Greedy Algorithmus

2. Die Güte des MIN-Greedy

   1.1. Obere Schranken

   bezüglich des maximalen Knotengrades Δ

   bezüglich des durchschnittlichen Knotengrades $\overline{d}$

Gliederung

1. Der MIN-Greedy Algorithmus

2. Die Güte des MIN-Greedy

   1.1. Obere Schranken

   bezüglich des maximalen Knotengrades Δ

   bezüglich des durchschnittlichen Knotengrades $\overline{d}$

   1.2. Untere Schranken

Gliederung

1. Der MIN-Greedy Algorithmus

2. Die Güte des MIN-Greedy

   1.1. Obere Schranken
   bezüglich des maximalen Knotengrades Δ
   bezüglich des durchschnittlichen Knotengrades $\overline{d}$

   1.2. Untere Schranken

3. Demonstration einer Implementierung des MIN-Greedy in Java

Der MIN-Greedy Algorithmus

$\text{MIN-}\textsc{Greedy}(G = (V, E))$

1 $\quad I_{Gr} \leftarrow \emptyset$

Der MIN-Greedy Algorithmus

$\text{MIN-G}\textsc{reedy}(G = (V, E))$

$I_{Gr} \leftarrow \emptyset$

while $V \neq \emptyset$ **do**

  wähle $v \in V$ mit $d(v) = \min_{w \in V}\{d(w)\}$

Der MIN-Greedy Algorithmus

$\text{MIN-}\textsc{Greedy}(G = (V, E))$

$I_{Gr} \leftarrow \emptyset$
while $V \neq \emptyset$ **do**
    wähle $v \in V$ mit $d(v) = \min_{w \in V}\{d(w)\}$
    $I_{Gr} \leftarrow I_{Gr} \cup \{v\}$

Der MIN-Greedy Algorithmus

$\text{MIN-}\textsc{Greedy}(G = (V, E))$

$I_{Gr} \leftarrow \emptyset$
while $V \neq \emptyset$ **do**
    wähle $v \in V$ mit $d(v) = \min_{w \in V}\{d(w)\}$
    $I_{Gr} \leftarrow I_{Gr} \cup \{v\}$
    $V \leftarrow V \setminus (\{v\} \cup N(v))$

Der MIN-Greedy Algorithmus

$\text{MIN-G}{\small \text{REEDY}}(G = (V, E))$

$I_{Gr} \leftarrow \emptyset$

while $V \neq \emptyset$ **do**

    wähle $v \in V$ mit $d(v) = \min_{w \in V}\{d(w)\}$

    $I_{Gr} \leftarrow I_{Gr} \cup \{v\}$

    $V \leftarrow V \setminus (\{v\} \cup N(v))$

    $E \leftarrow E \setminus \{e : e \in E$ und $e \cap (\{v\} \cup N(v)) \neq \emptyset\}$

Der MIN-Greedy Algorithmus

$\text{MIN-G}{\scriptsize\text{REEDY}}(G = (V, E))$

$I_{Gr} \leftarrow \emptyset$

while $V \neq \emptyset$ **do**

  wähle $v \in V$ mit $d(v) = \min_{w \in V}\{d(w)\}$

  $I_{Gr} \leftarrow I_{Gr} \cup \{v\}$

  $V \leftarrow V \setminus (\{v\} \cup N(v))$

  $E \leftarrow E \setminus \{e : e \in E$ und $e \cap (\{v\} \cup N(v)) \neq \emptyset\}$

return I_{Gr}

Obere Schranke der Güte bezüglich Δ

Satz 1 *Sei Δ der maximale Grad des Graphen $G = (V, E)$. Dann gilt für die Güte des MIN-Greedy*

$$R_{Gr}(G) \leq \frac{\Delta + 2}{3} \,.$$

Obere Schranke der Güte bezüglich Δ

Satz 1 *Sei Δ der maximale Grad des Graphen $G = (V, E)$. Dann gilt für die Güte des MIN-Greedy*

$$R_{Gr}(G) \leq \frac{\Delta + 2}{3}\ .$$

Beweis: Teil 1. $\square$

Obere Schranke der Güte bezüglich $\overline{d}$

Satz 2 *Sei* $\overline{\mathrm{d}}$ *der Durchschnittsgrad eines Graphen* $G = (V, E)$*. Dann gilt für die Güte des MIN-Greedy*

$$R_{Gr}(G) \leq \frac{\overline{d} + 2}{2} \; .$$

Obere Schranke der Güte bezüglich $\overline{d}$

Satz 2 *Sei* $\overline{\mathrm{d}}$ *der Durchschnittsgrad eines Graphen* $G = (V, E)$. *Dann gilt für die Güte des MIN-Greedy*

$$R_{Gr}(G) \leq \frac{\overline{d} + 2}{2} \; .$$

Beweis: In Teil 1 des Vortrages wurde bewiesen, dass

$$|I_{Gr}| \geq \frac{(1 + \tau^2) \cdot n}{\overline{d} + 1 + \tau}$$

gilt.

Eine maximale unabhängige Menge hat die Kardinalität $\alpha = \tau \cdot n$.

Eine maximale unabhängige Menge hat die Kardinalität $\alpha = \tau \cdot n$. Für die Güte gilt also:

$$R_{Gr}(G) \quad \leq \quad \frac{(\tau \cdot n) \cdot (\overline{d} + 1 + \tau)}{(1 + \tau^2) \cdot n}$$

Eine maximale unabhängige Menge hat die Kardinalität $\alpha = \tau \cdot n$. Für die Güte gilt also:

$$\begin{aligned} R_{Gr}(G) &\leq \frac{(\tau \cdot n) \cdot (\overline{d} + 1 + \tau)}{(1 + \tau^2) \cdot n} \\ &= \frac{\overline{d} \cdot \tau + \tau + \tau^2}{1 + \tau^2} \end{aligned}$$

Eine maximale unabhängige Menge hat die Kardinalität $\alpha = \tau \cdot n$. Für die Güte gilt also:

$$\begin{aligned} R_{Gr}(G) &\le \frac{(\tau \cdot n) \cdot (\overline{d} + 1 + \tau)}{(1 + \tau^2) \cdot n} \\ &= \frac{\overline{d} \cdot \tau + \tau + \tau^2}{1 + \tau^2} \\ &= f(\tau)\ . \end{aligned}$$

Eine maximale unabhängige Menge hat die Kardinalität $\alpha = \tau \cdot n$. Für die Güte gilt also:

$$\begin{aligned} R_{Gr}(G) &\leq \frac{(\tau \cdot n) \cdot (\overline{d} + 1 + \tau)}{(1 + \tau^2) \cdot n} \\ &= \frac{\overline{d} \cdot \tau + \tau + \tau^2}{1 + \tau^2} \\ &= f(\tau)\ . \end{aligned}$$

Die Funktion $f(\tau)$ ist im Intervall $(0, 1]$ monoton steigend und nimmt ihr Maximum für $\tau = 1$ an.

Eine maximale unabhängige Menge hat die Kardinalität $\alpha = \tau \cdot n$. Für die Güte gilt also:

$$
\begin{aligned}
R_{Gr}(G) &\le \frac{(\tau \cdot n) \cdot (\overline{d} + 1 + \tau)}{(1 + \tau^2) \cdot n} \\
&= \frac{\overline{d} \cdot \tau + \tau + \tau^2}{1 + \tau^2} \\
&= f(\tau) \,.
\end{aligned}
$$

Die Funktion $f(\tau)$ ist im Intervall $(0, 1]$ monoton steigend und nimmt ihr Maximum für $\tau = 1$ an.

Damit gilt

$$R_{Gr}(G) \le \frac{\overline{d} + 2}{2} \,. \qquad \square$$

Untere Schranken der Güte

Die vorgestellten oberen Schranken der Güte des MIN-Greedy Algorithmus können nicht wesentlich verbessert werden.

Untere Schranken der Güte

Die vorgestellten oberen Schranken der Güte des MIN-Greedy Algorithmus können nicht wesentlich verbessert werden.

Satz 3 *Es gibt Graphen $G = (V, E)$ mit maximalem Knotengrad $\Delta \geq 3$, so dass für die Güte des MIN-Greedy Algorithmus*

$$R_{Gr}(G) \geq \frac{\Delta + 2}{3} - O(\Delta^2/n)$$

gilt.

Untere Schranken der Güte

Die vorgestellten oberen Schranken der Güte des MIN-Greedy Algorithmus können nicht wesentlich verbessert werden.

Satz 3 *Es gibt Graphen $G = (V, E)$ mit maximalem Knotengrad $\Delta \geq 3$, so dass für die Güte des MIN-Greedy Algorithmus*

$$R_{Gr}(G) \geq \frac{\Delta + 2}{3} - O(\Delta^2/n)$$

gilt.

Beweis: Wir konstruieren in Abhängigkeit von Δ mod 3 Graphen, so dass keine bessere Güte erreichen kann.

Fall 1: Es sei $\Delta \equiv 1 \bmod 3$.

Fall 1: Es sei $\Delta \equiv 1 \bmod 3$.

Konstruiere für einen Parameter $j \geq 2$ einen Graphen, der aus einer Kette von Teilgraphen der Form

$$K_j \text{ --- } \overline{K_j}$$

besteht.

Fall 1: Es sei $\Delta \equiv 1 \bmod 3$.

Konstruiere für einen Parameter $j \geq 2$ einen Graphen, der aus einer Kette von Teilgraphen der Form

$$K_j - \overline{K_j}$$

besteht.

Jede Clique ist vollständig mit der nächsten unabhängigen Menge verbunden.

Fall 1: Es sei $\Delta \equiv 1 \bmod 3$.

Konstruiere für einen Parameter $j \geq 2$ einen Graphen, der aus einer Kette von Teilgraphen der Form

$$K_j \;\text{—}\; \overline{K_j}$$

besteht.

Jede Clique ist vollständig mit der nächsten unabhängigen Menge verbunden.

Die Knoten der unabhängigen Menge eines Teilgraphen werden – bis auf ein perfektes Matching – vollständig mit der Clique des nächsten Teilgraphen verbunden.

Den Abschluss bildet eine Clique K_j, die vollständig mit der letzten unabhängigen Menge verbunden ist.

Den Abschluss bildet eine Clique K_j, die vollständig mit der letzten unabhängigen Menge verbunden ist.

Ein vollständiger Graph aus 2 Teilgraphen für den Parameter $j = 3$ hat folgende Gestalt:

Den Abschluss bildet eine Clique K_j, die vollständig mit der letzten unabhängigen Menge verbunden ist.

Ein vollständiger Graph aus 2 Teilgraphen für den Parameter $j = 3$ hat folgende Gestalt:

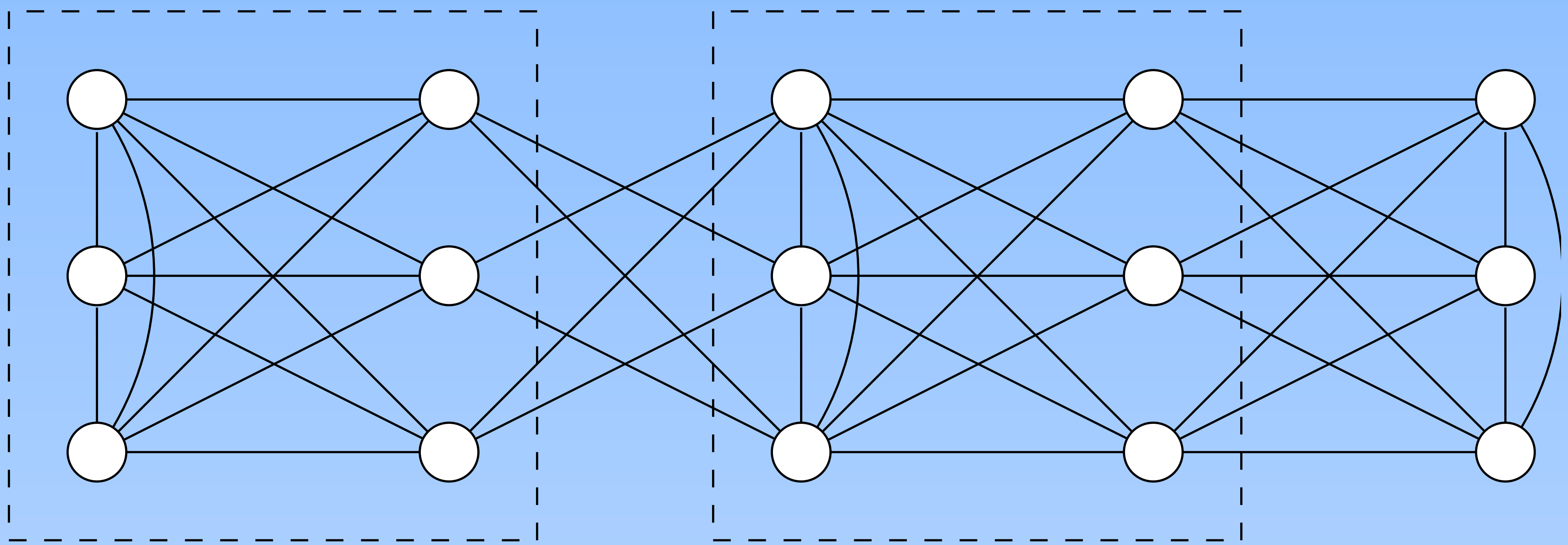
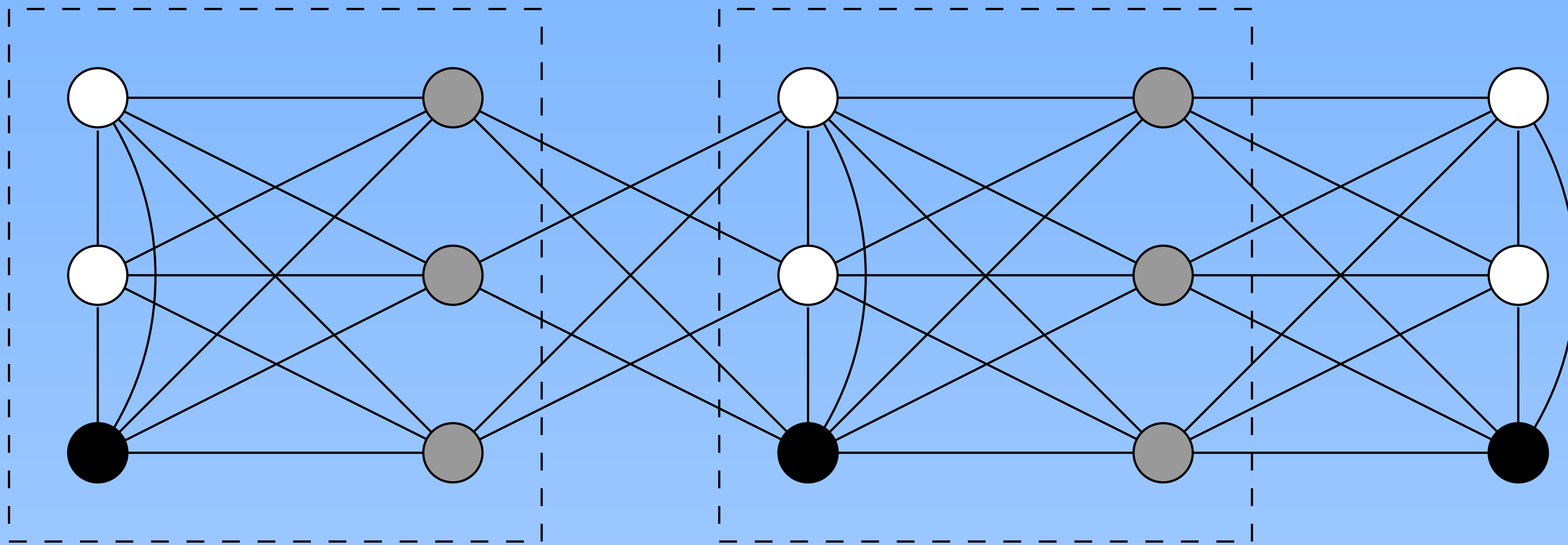
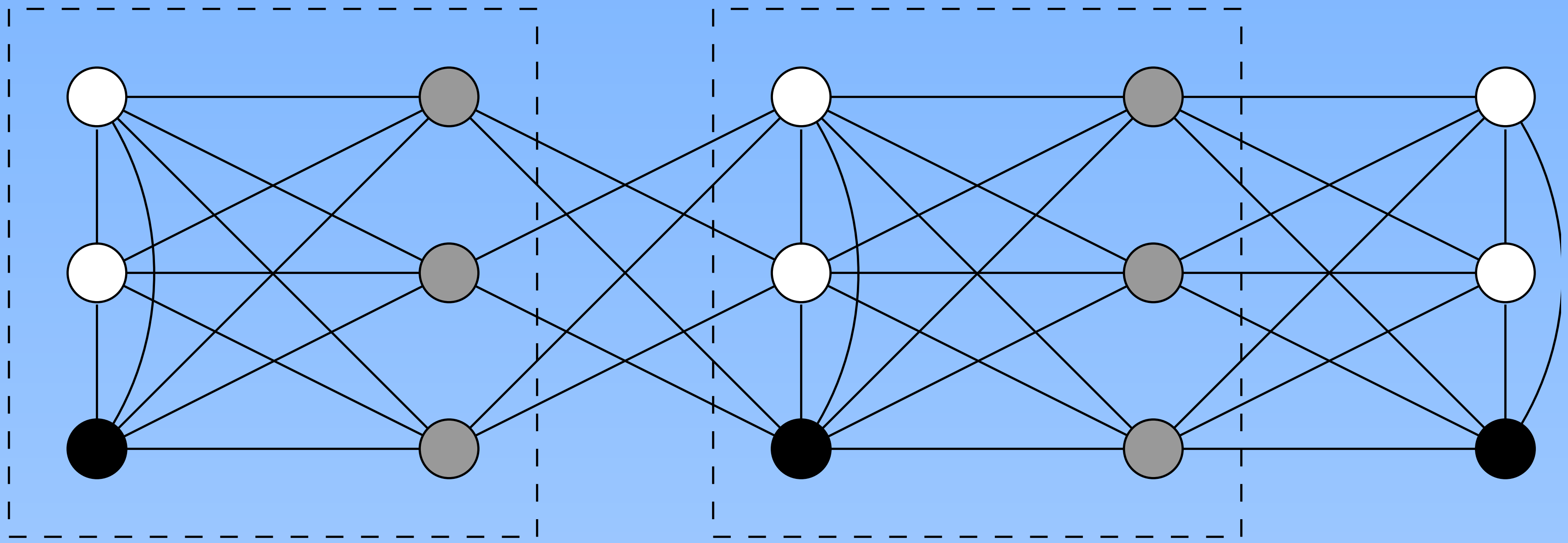


Tabelle der Knotengrade:

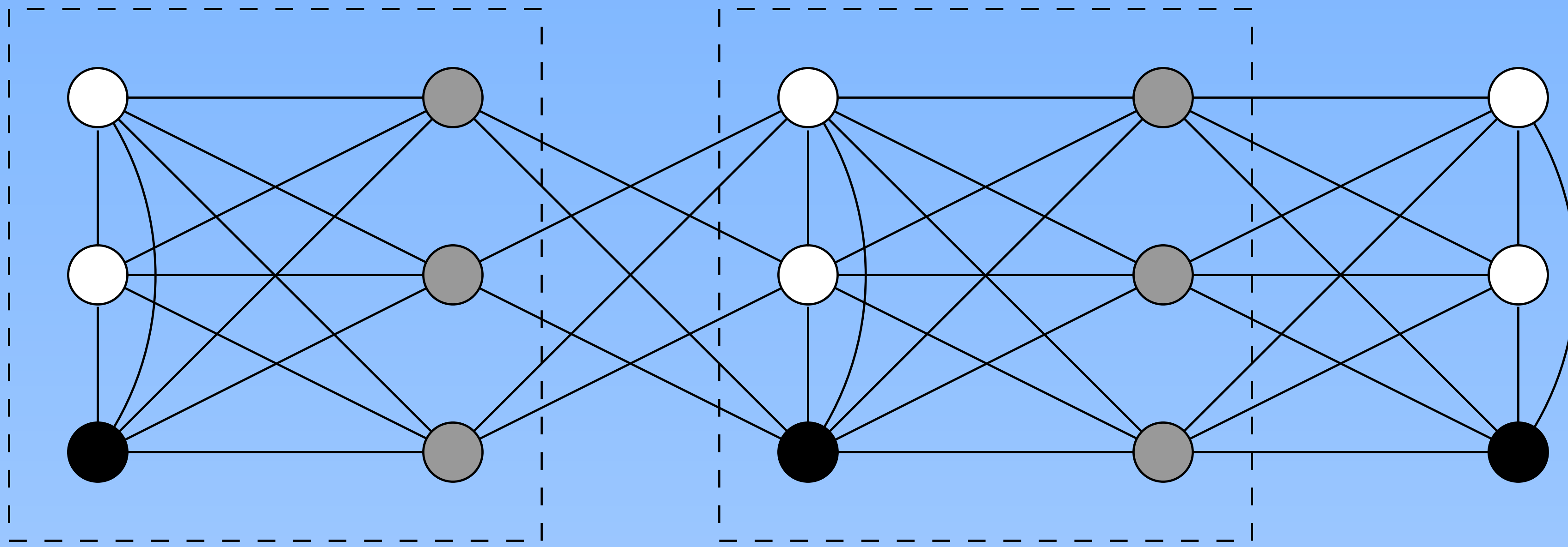
Tabelle der Knotengrade:

	Knotengrad
Knoten der ersten Clique	$2j-1$
Knoten der abschließenden Clique	$2j-1$
Knoten aller anderen Cliquen	$3j-2$
Knoten der letzten unabhängigen Menge	$2j$
Knoten aller anderen unabhängigen Mengen	$2j-1$





$$|I_{Gr}| = \frac{n-j}{2j} + 1$$



$$|I_{Gr}| = \frac{n-j}{2j} + 1$$

$$|I_{max}| = \frac{n-j}{2}$$

Für die Güte gilt also

$$R_{Gr}(G) \quad \geq \quad \frac{(n-j)/2}{(n-j)/(2j)+1}$$

Für die Güte gilt also

$$
\begin{aligned}
R_{Gr}(G) &\geq \frac{(n-j)/2}{(n-j)/(2j)+1} \\
&= j - \frac{2j^2}{n+j}\,.
\end{aligned}
$$

Für die Güte gilt also

$$\begin{aligned} R_{Gr}(G) &\geq \frac{(n-j)/2}{(n-j)/(2j)+1} \\ &= j - \frac{2j^2}{n+j}\,. \end{aligned}$$

Der Maximalgrad ist $\Delta = 3j - 2$.

Für die Güte gilt also

$$\begin{aligned} R_{Gr}(G) &\geq \frac{(n-j)/2}{(n-j)/(2j)+1} \\ &= j - \frac{2j^2}{n+j} \,. \end{aligned}$$

Der Maximalgrad ist $\Delta = 3j - 2$. Also gilt

$$R_{Gr}(G) \geq j - \frac{2j^2}{n+j}$$

Für die Güte gilt also

$$
\begin{aligned}
R_{Gr}(G) &\geq \frac{(n-j)/2}{(n-j)/(2j)+1} \\
&= j - \frac{2j^2}{n+j}\,.
\end{aligned}
$$

Der Maximalgrad ist $\Delta = 3j - 2$. Also gilt

$$
\begin{aligned}
R_{Gr}(G) &\geq j - \frac{2j^2}{n+j} \\
&= \frac{\Delta+2}{3} - \frac{2\cdot((\Delta+2)/3)^2}{n+(\Delta+2)/3}
\end{aligned}
$$

Für die Güte gilt also

$$
\begin{aligned}
R_{Gr}(G) &\geq \frac{(n-j)/2}{(n-j)/(2j)+1} \\
&= j - \frac{2j^2}{n+j} \, .
\end{aligned}
$$

Der Maximalgrad ist $\Delta = 3j - 2$. Also gilt

$$
\begin{aligned}
R_{Gr}(G) &\geq j - \frac{2j^2}{n+j} \\
&= \frac{\Delta+2}{3} - \frac{2\cdot((\Delta+2)/3)^2}{n+(\Delta+2)/3} \\
&= \frac{\Delta+2}{3} - O(\Delta^2/n) \, .
\end{aligned}
$$

Fall 2: Es sei $\Delta \equiv 0 \bmod 3$.

Fall 2: Es sei $\Delta \equiv 0 \bmod 3$.

Konstruiere für einen Parameter $j \geq 2$ einen Graphen, der aus einer Kette von Teilgraphen der Form

$$K_{j-1} - \overline{K_j} - K_{j-1} - \overline{K_j} - K_j - \overline{K_{j-1}}$$

besteht.

Fall 2: Es sei $\Delta \equiv 0 \bmod 3$.

Konstruiere für einen Parameter $j \geq 2$ einen Graphen, der aus einer Kette von Teilgraphen der Form

$$K_{j-1} \text{---} \overline{K_j} \text{---} K_{j-1} \text{---} \overline{K_j} \text{---} K_j \text{---} \overline{K_{j-1}}$$

besteht.

Jede Clique ist vollständig mit der nächsten unabhängigen Menge verbunden.

Fall 2: Es sei $\Delta \equiv 0 \bmod 3$.

Konstruiere für einen Parameter $j \geq 2$ einen Graphen, der aus einer Kette von Teilgraphen der Form

$$K_{j-1} — \overline{K_j} — K_{j-1} — \overline{K_j} — K_j — \overline{K_{j-1}}$$

besteht.

Jede Clique ist vollständig mit der nächsten unabhängigen Menge verbunden.

Die Verbindung einer unabhängigen Menge mit der nächsten Clique ist – bis auf ein einzelnes maximales Matching – vollständig.

Fall 2: Es sei $\Delta \equiv 0 \bmod 3$.

Konstruiere für einen Parameter $j \geq 2$ einen Graphen, der aus einer Kette von Teilgraphen der Form

$$K_{j-1} - \overline{K_j} - K_{j-1} - \overline{K_j} - K_j - \overline{K_{j-1}}$$

besteht.

Jede Clique ist vollständig mit der nächsten unabhängigen Menge verbunden.

Die Verbindung einer unabhängigen Menge mit der nächsten Clique ist – bis auf ein einzelnes maximales Matching – vollständig.

In dieser Weise erfolgt auch die Verbindung zweier Teilgraphen.

Die Kette wird mit einer Clique K_{j-1} abgeschlossen.

Die Kette wird mit einer Clique K_{j-1} abgeschlossen.

Ein vollständiger Graph aus 2 Teilgraphen für den Parameter $j = 3$ hat folgende Gestalt:

Die Kette wird mit einer Clique K_{j-1} abgeschlossen.

Ein vollständiger Graph aus 2 Teilgraphen für den Parameter $j = 3$ hat folgende Gestalt:

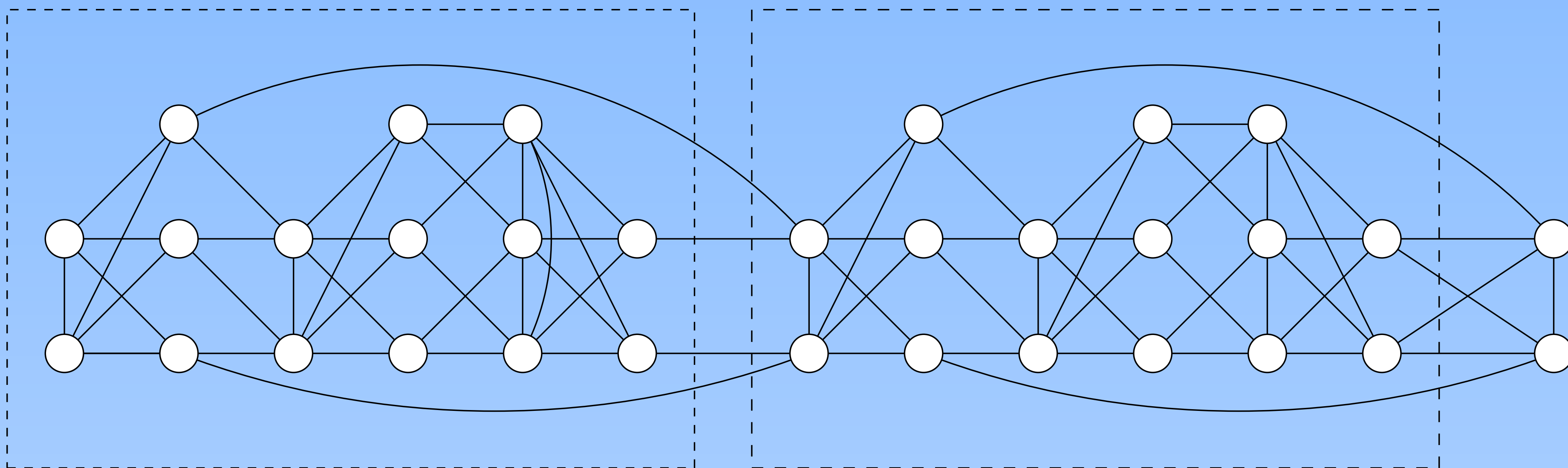
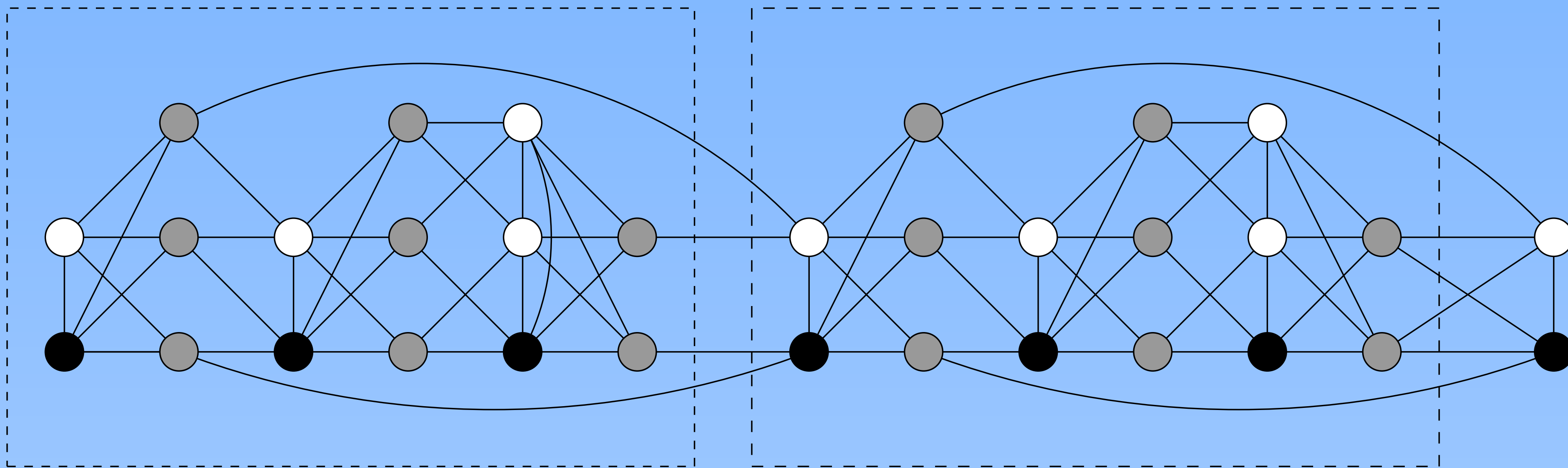
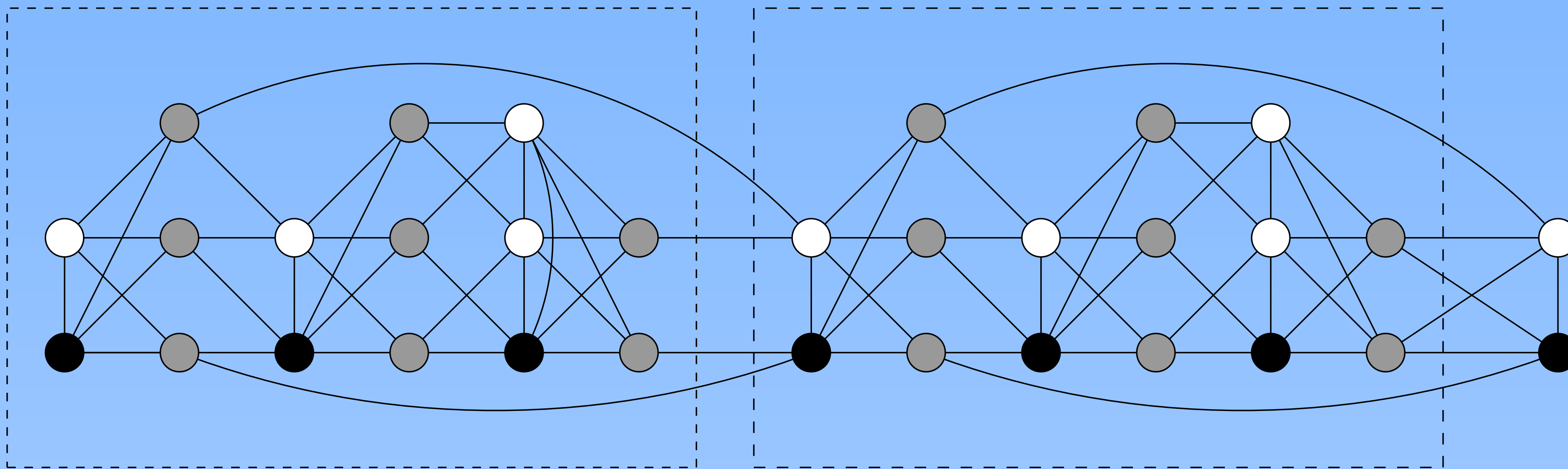


Tabelle der Knotengrade:

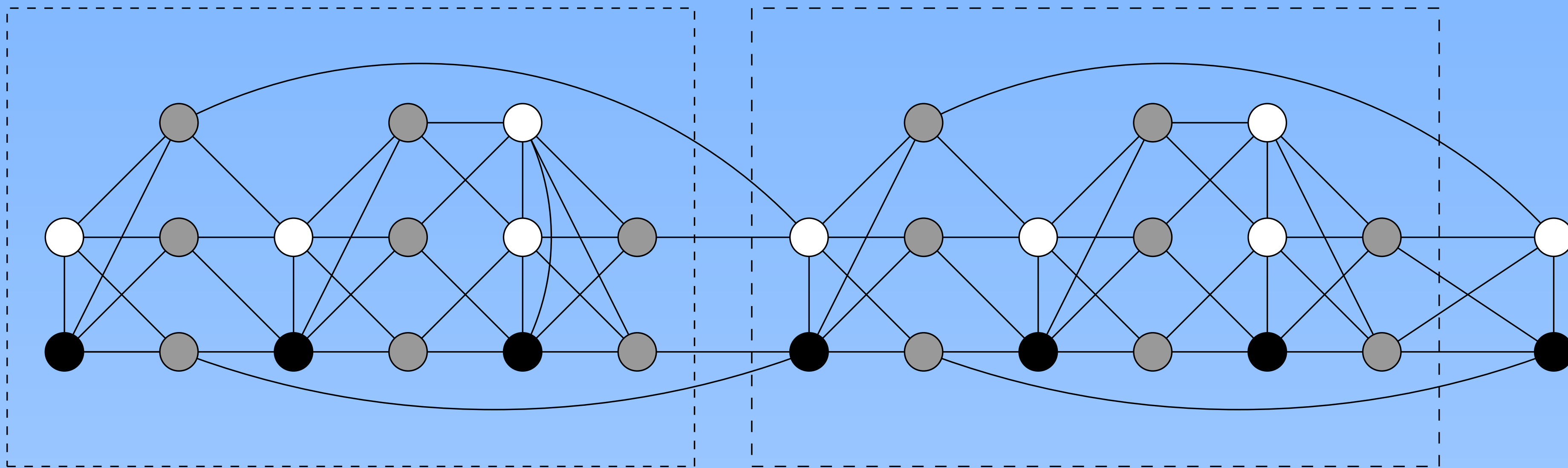
Tabelle der Knotengrade:

	Knotengrad
Knoten der ersten Clique	$2j-2$
Knoten der abschließenden Clique	$2j-2$
Knoten aller anderen Cliquen	$3j-3$
Knoten der letzten unabhängigen Menge	$2j-1$
Knoten aller anderen unabhängigen Mengen	$2j-2$





$$|I_{Gr}| = 3 \cdot \frac{n - j + 1}{6j - 3} + 1$$



$$|I_{Gr}| = 3 \cdot \frac{n-j+1}{6j-3} + 1$$

$$|I_{max}| = (3j-1) \cdot \frac{n-j+1}{6j-3}$$

Damit erhalten wir für die Güte

$$R_{Gr}(G) \;\geq\; \frac{(3j-1)\cdot(n-j+1)/(6j-3)}{3(n-j+1)/(6j-3)+1}$$

Damit erhalten wir für die Güte

$$
\begin{aligned}
R_{Gr}(G) &\geq \frac{(3j-1)\cdot(n-j+1)/(6j-3)}{3(n-j+1)/(6j-3)+1} \\
&= \frac{3j-1}{3} - \frac{6j^2-5j+1}{3n+3j}\,.
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir für die Güte

$$\begin{aligned} R_{Gr}(G) &\geq \frac{(3j-1)\cdot(n-j+1)/(6j-3)}{3(n-j+1)/(6j-3)+1} \\ &= \frac{3j-1}{3} - \frac{6j^2-5j+1}{3n+3j} \,. \end{aligned}$$

Der Maximalgrad ist $\Delta = 3j-3$.

Damit erhalten wir für die Güte

$$R_{Gr}(G) \;\geq\; \frac{(3j-1)\cdot(n-j+1)/(6j-3)}{3(n-j+1)/(6j-3)+1}$$
$$=\; \frac{3j-1}{3} - \frac{6j^2-5j+1}{3n+3j}\,.$$

Der Maximalgrad ist $\Delta = 3j - 3$.

Also gilt

$$R_{Gr}(G) \;\geq\; \frac{\Delta+2}{3} - \frac{2\Delta^2/3 + 8\Delta/3 - 3}{3n+\Delta+3}$$

Damit erhalten wir für die Güte

$$R_{Gr}(G) \geq \frac{(3j-1)\cdot(n-j+1)/(6j-3)}{3(n-j+1)/(6j-3)+1} = \frac{3j-1}{3} - \frac{6j^2-5j+1}{3n+3j}\ .$$

Der Maximalgrad ist $\Delta = 3j-3$.

Also gilt

$$R_{Gr}(G) \geq \frac{\Delta+2}{3} - \frac{2\Delta^2/3+8\Delta/3-3}{3n+\Delta+3} = \frac{\Delta+2}{3} - O(\Delta^2/n)\ .$$

Fall 3: Es sei $\Delta \equiv 2 \bmod 3$.

Fall 3: Es sei $\Delta \equiv 2 \bmod 3$.

Konstruiere für einen Parameter $j \geq 2$ einen Graphen, der aus einer Kette von Teilgraphen der Form

$$K_{j-1} - \overline{K_{j+1}} - K_j - \overline{K_j} - K_j - \overline{K_j}\ .$$

besteht.

Fall 3: Es sei $\Delta \equiv 2 \bmod 3$.

Konstruiere für einen Parameter $j \geq 2$ einen Graphen, der aus einer Kette von Teilgraphen der Form

$$K_{j-1} - \overline{K_{j+1}} - K_j - \overline{K_j} - K_j - \overline{K_j}\ .$$

besteht.

Jede Clique wird vollständig mit der nächsten unabhängigen Menge verbunden.

Fall 3: Es sei $\Delta \equiv 2 \bmod 3$.

Konstruiere für einen Parameter $j \geq 2$ einen Graphen, der aus einer Kette von Teilgraphen der Form

$$K_{j-1} — \overline{K_{j+1}} — K_j — \overline{K_j} — K_j — \overline{K_j}\ .$$

besteht.

Jede Clique wird vollständig mit der nächsten unabhängigen Menge verbunden.

Die unabhängigen Mengen sind – bis auf ein einzelnes maximales Matching – vollständig mit der nächsten Clique verbunden.

Zwei Teilgraphen werden verbunden, indem die letzte unabhängige Menge eines Teilgraphen vollständig mit der ersten Clique des nächsten Teilgraphens verbunden wird.

Zwei Teilgraphen werden verbunden, indem die letzte unabhängige Menge eines Teilgraphen vollständig mit der ersten Clique des nächsten Teilgraphens verbunden wird.

Die Kette wird mit einer Clique K_j abgeschlossen.

Zwei Teilgraphen werden verbunden, indem die letzte unabhängige Menge eines Teilgraphen vollständig mit der ersten Clique des nächsten Teilgraphens verbunden wird.

Die Kette wird mit einer Clique K_j abgeschlossen.

Ein vollständiger Graph aus 2 Teilgraphen für den Parameter $j = 3$ hat folgende Gestalt:

Zwei Teilgraphen werden verbunden, indem die letzte unabhängige Menge eines Teilgraphen vollständig mit der ersten Clique des nächsten Teilgraphens verbunden wird.

Die Kette wird mit einer Clique K_j abgeschlossen.

Ein vollständiger Graph aus 2 Teilgraphen für den Parameter $j = 3$ hat folgende Gestalt:

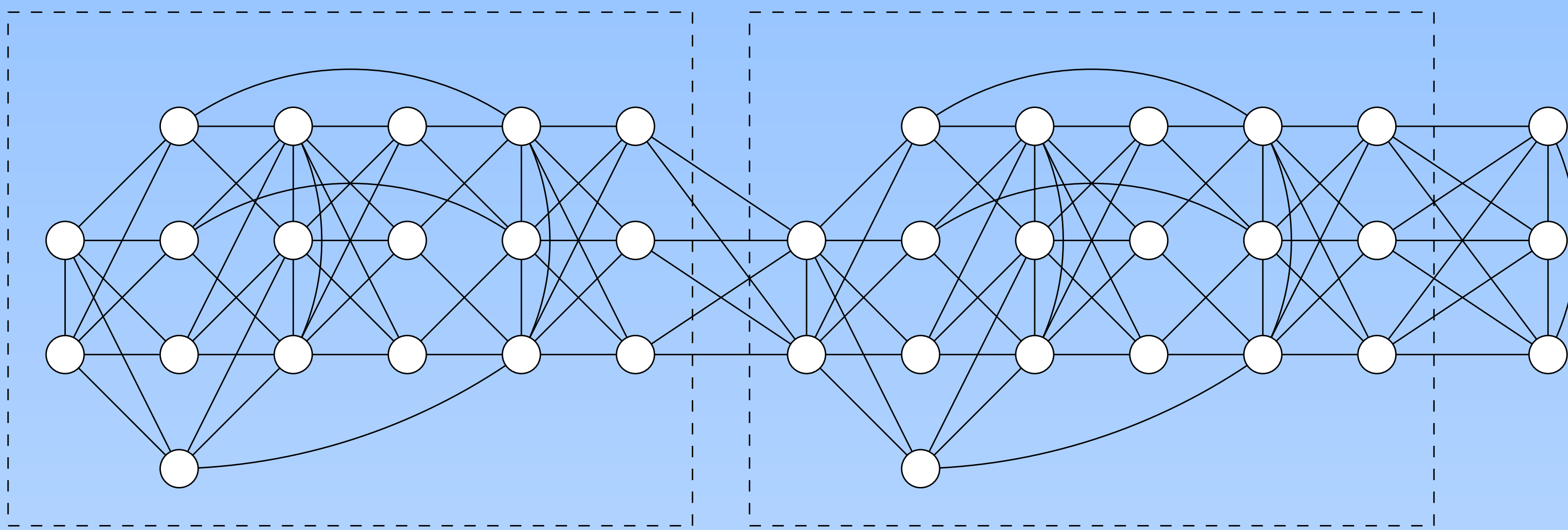
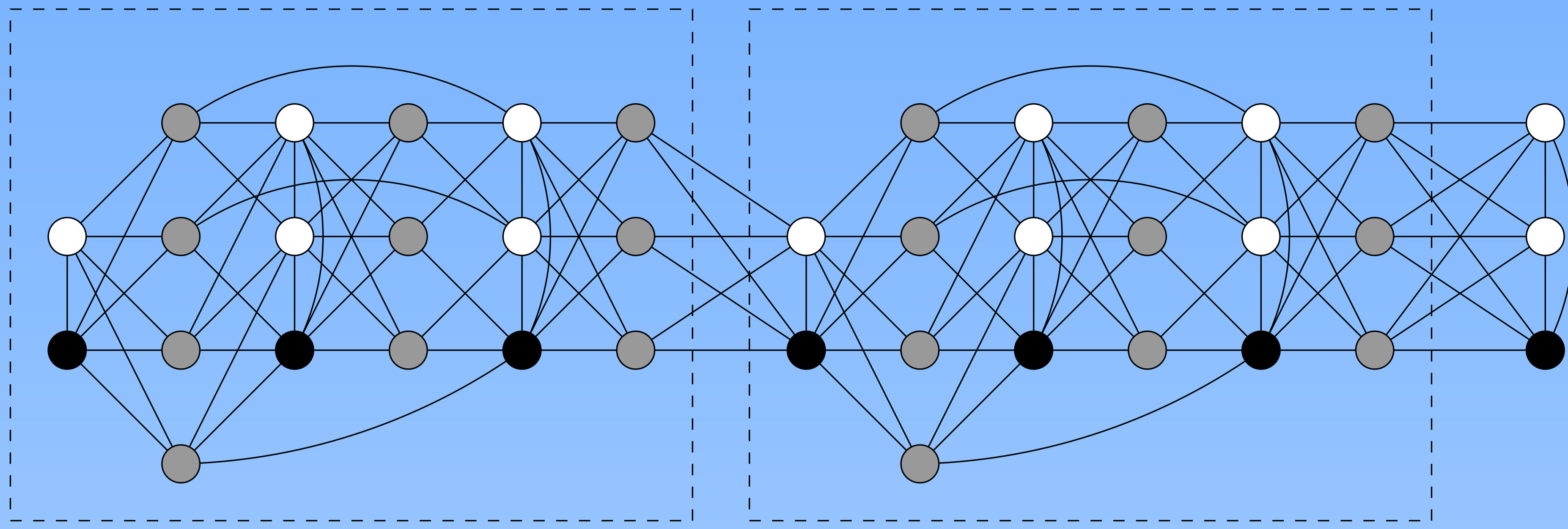
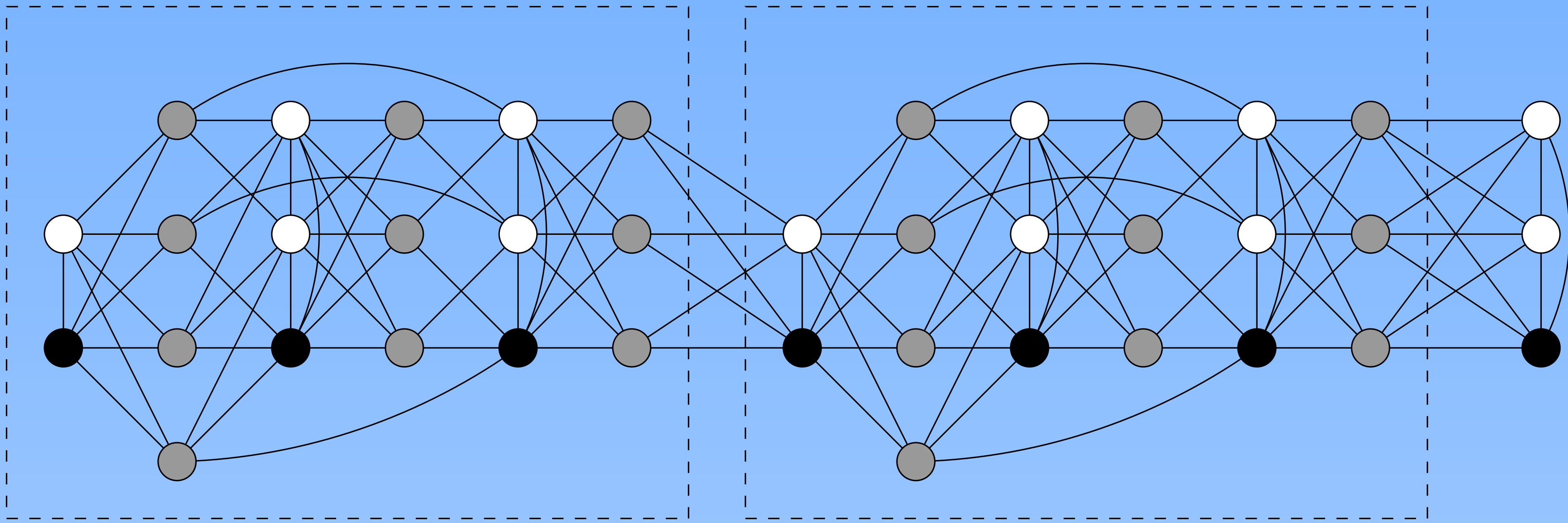


Tabelle der Knotengrade:

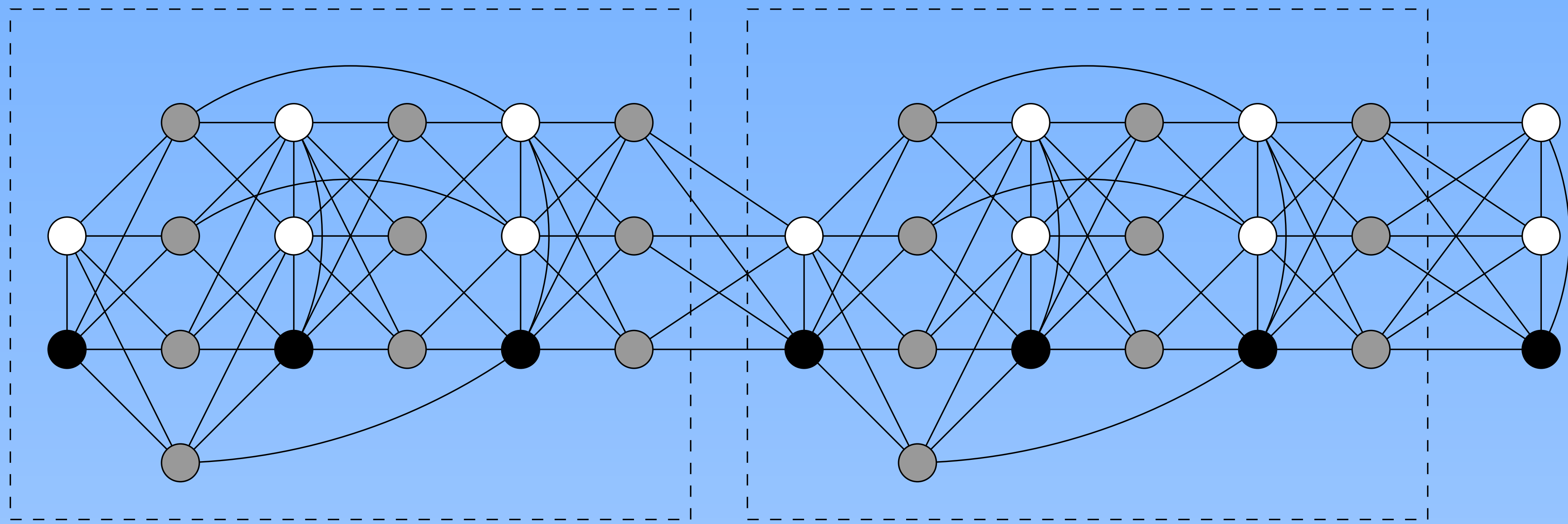
Tabelle der Knotengrade:

	Knotengrad
Knoten der ersten Clique	$2j - 1$
Knoten der abschließenden Clique	$2j - 1$
Knoten aller anderen Cliquen	$3j - 1$
Knoten der letzten unabhängigen Menge	$2j$
Knoten aller anderen unabhängigen Mengen	$2j - 1$





$$|I_{Gr}| \quad = \quad 3 \cdot \frac{n-j}{6j} + 1$$



$$|I_{Gr}| = 3 \cdot \frac{n-j}{6j} + 1$$

$$|I_{max}| = (3j+1) \cdot \frac{n-j}{6j}$$

Damit erhalten wir für die Güte

$$R_{Gr}(G) \quad \geq \quad \frac{(3j+1)\cdot(n-j)/(6j)}{3(n-j)/(6j)+1}$$

Damit erhalten wir für die Güte

$$
\begin{aligned}
R_{Gr}(G) &\geq \frac{(3j+1)\cdot(n-j)/(6j)}{3(n-j)/(6j)+1} \\
&= \frac{3j+1}{3} - \frac{6j^2+2j}{3n+3j} \,.
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir für die Güte

$$
\begin{aligned}
R_{Gr}(G) &\geq \frac{(3j+1)\cdot(n-j)/(6j)}{3(n-j)/(6j)+1} \\
&= \frac{3j+1}{3} - \frac{6j^2+2j}{3n+3j} \,.
\end{aligned}
$$

Der Maximalgrad ist $\Delta = 3j - 1$.

Damit erhalten wir für die Güte

$$\begin{aligned} R_{Gr}(G) &\geq \frac{(3j+1)\cdot(n-j)/(6j)}{3(n-j)/(6j)+1} \\ &= \frac{3j+1}{3} - \frac{6j^2+2j}{3n+3j} \, . \end{aligned}$$

Der Maximalgrad ist $\Delta = 3j - 1$.

Also gilt

$$R_{Gr}(G) \geq \frac{\Delta+2}{3} - \frac{2\Delta^2/3 + 2\Delta + 4/3}{3n+\Delta+1}$$

Damit erhalten wir für die Güte

$$\begin{aligned} R_{Gr}(G) &\geq \frac{(3j+1)\cdot(n-j)/(6j)}{3(n-j)/(6j)+1} \\ &= \frac{3j+1}{3} - \frac{6j^2+2j}{3n+3j} \,. \end{aligned}$$

Der Maximalgrad ist $\Delta = 3j - 1$.

Also gilt

$$\begin{aligned} R_{Gr}(G) &\geq \frac{\Delta+2}{3} - \frac{2\Delta^2/3+2\Delta+4/3}{3n+\Delta+1} \\ &= \frac{\Delta+2}{3} - O(\Delta^2/n) \,. \end{aligned} \qquad \square$$

Satz 4 *Es gibt Graphen $G = (V, E)$ mit durchschnittlichem Knotengrad $\overline{\mathrm{d}}$, so dass für die Güte des MIN-Greedy Algorithmus*

$$R_{Gr}(G) \geq \frac{\overline{\mathrm{d}} + 2}{2} - O(1/\overline{\mathrm{d}})$$

gilt.

Satz 4 *Es gibt Graphen $G = (V, E)$ mit durchschnittlichem Knotengrad $\overline{\mathrm{d}}$, so dass für die Güte des MIN-Greedy Algorithmus*

$$R_{Gr}(G) \geq \frac{\overline{d} + 2}{2} - O(1/\overline{d})$$

gilt.

Beweis: Konstruiere für einen Parameter $j \geq 2$ einen Graphen, der aus einer Kette von Teilgraphen der Form

$$K_1 - \overline{K_j}$$

besteht.

Satz 4 *Es gibt Graphen $G = (V, E)$ mit durchschnittlichem Knotengrad $\overline{\mathrm{d}}$, so dass für die Güte des MIN-Greedy Algorithmus*

$$R_{Gr}(G) \geq \frac{\overline{d} + 2}{2} - O(1/\overline{d})$$

gilt.

Beweis: Konstruiere für einen Parameter $j \geq 2$ einen Graphen, der aus einer Kette von Teilgraphen der Form

$$K_1 - \overline{K_j}$$

besteht.

Die Anzahl h der Teilgraphen soll dabei wesentlich größer als der Parameter j sein.

Die Kette wird mit einer Clique K_j abgeschlossen.

Die Kette wird mit einer Clique K_j abgeschlossen.

Die Verbindung der einzelnen Teilgraphen geschieht nun so:

Die Kette wird mit einer Clique K_j abgeschlossen.

Die Verbindung der einzelnen Teilgraphen geschieht nun so:

1. Für die ersten $h - j + 1$ Teilgraphen gilt:

Die Kette wird mit einer Clique K_j abgeschlossen.

Die Verbindung der einzelnen Teilgraphen geschieht nun so:

1. Für die ersten $h - j + 1$ Teilgraphen gilt:

Jeder Knoten der j-elementigen unabhängigen Menge eines Teilgraphens wird mit den einzelnen (Cliquen)-Knoten der $j - 1$ nachfolgenden Teilgraphen verbunden.

Die Kette wird mit einer Clique K_j abgeschlossen.

Die Verbindung der einzelnen Teilgraphen geschieht nun so:

1. Für die ersten $h - j + 1$ Teilgraphen gilt:

Jeder Knoten der j-elementigen unabhängigen Menge eines Teilgraphens wird mit den einzelnen (Cliquen)-Knoten der $j - 1$ nachfolgenden Teilgraphen verbunden.

2. Für die letzten $j - 1$ Teilgraphen gilt:

Die Kette wird mit einer Clique K_j abgeschlossen.

Die Verbindung der einzelnen Teilgraphen geschieht nun so:

1. Für die ersten $h - j + 1$ Teilgraphen gilt:

Jeder Knoten der j-elementigen unabhängigen Menge eines Teilgraphens wird mit den einzelnen (Cliquen)-Knoten der $j - 1$ nachfolgenden Teilgraphen verbunden.

2. Für die letzten $j - 1$ Teilgraphen gilt:

Verbinde so weit wie möglich analog zu Punkt 1.

Die Kette wird mit einer Clique K_j abgeschlossen.

Die Verbindung der einzelnen Teilgraphen geschieht nun so:

1. Für die ersten $h - j + 1$ Teilgraphen gilt:

Jeder Knoten der j-elementigen unabhängigen Menge eines Teilgraphens wird mit den einzelnen (Cliquen)-Knoten der $j - 1$ nachfolgenden Teilgraphen verbunden.

2. Für die letzten $j - 1$ Teilgraphen gilt:

Verbinde so weit wie möglich analog zu Punkt 1.

Verbinde die j unabhängigen Knoten des i'ten letzten Teilgraphens durch $j - i$ paarweise verschiedene Matchings mit den j Knoten der letzten Clique.

Ein vollständiger Graph aus 7 Teilgraphen für den Parameter $j = 3$ hat folgende Gestalt:

Ein vollständiger Graph aus 7 Teilgraphen für den Parameter $j = 3$ hat folgende Gestalt:

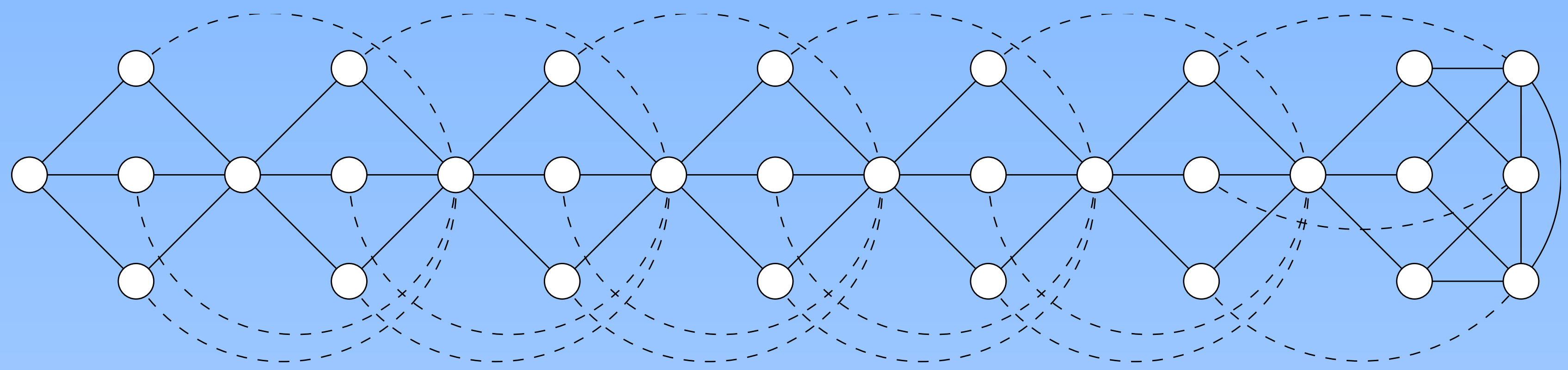
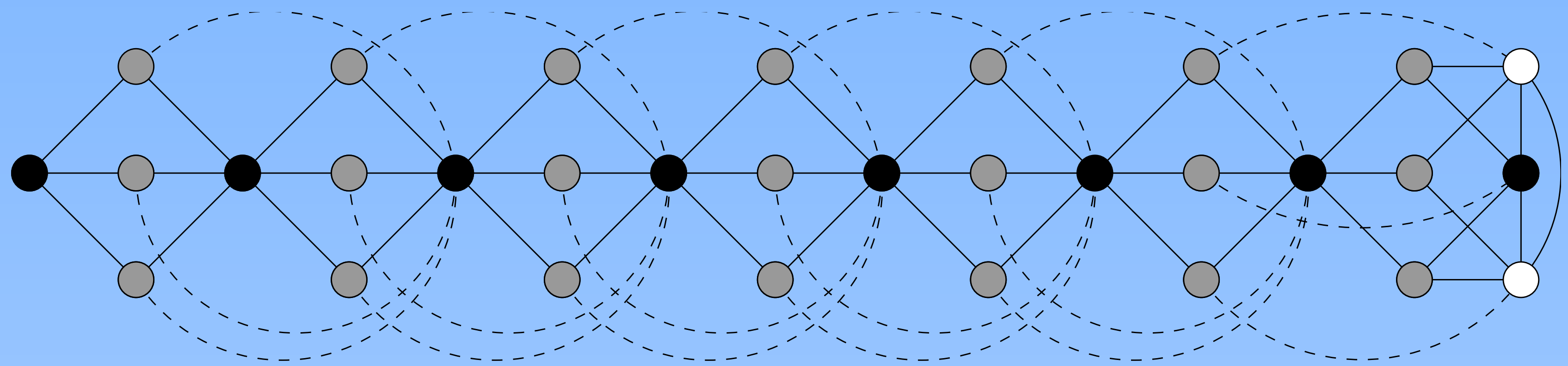
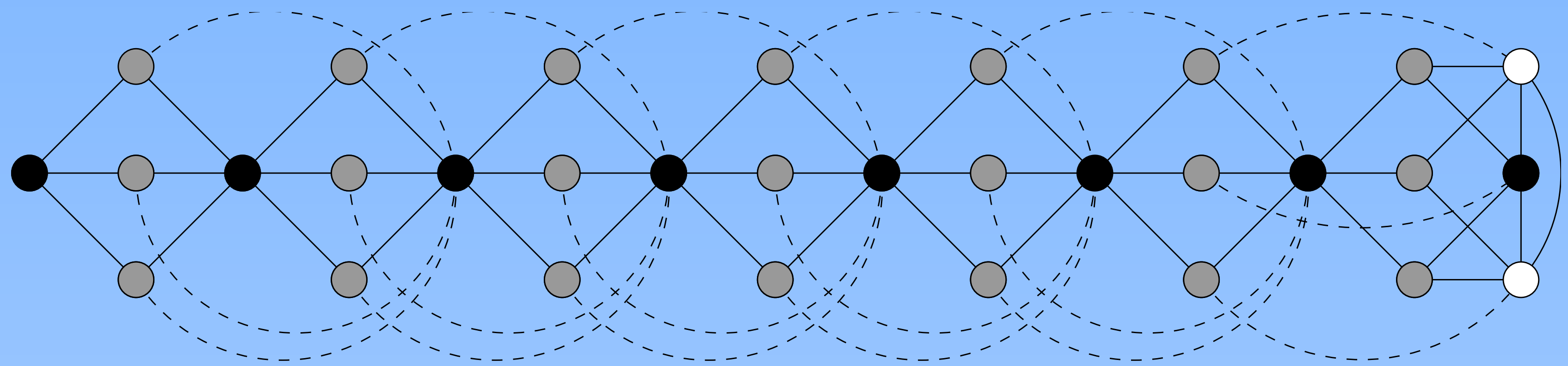


Tabelle der Knotengrade:

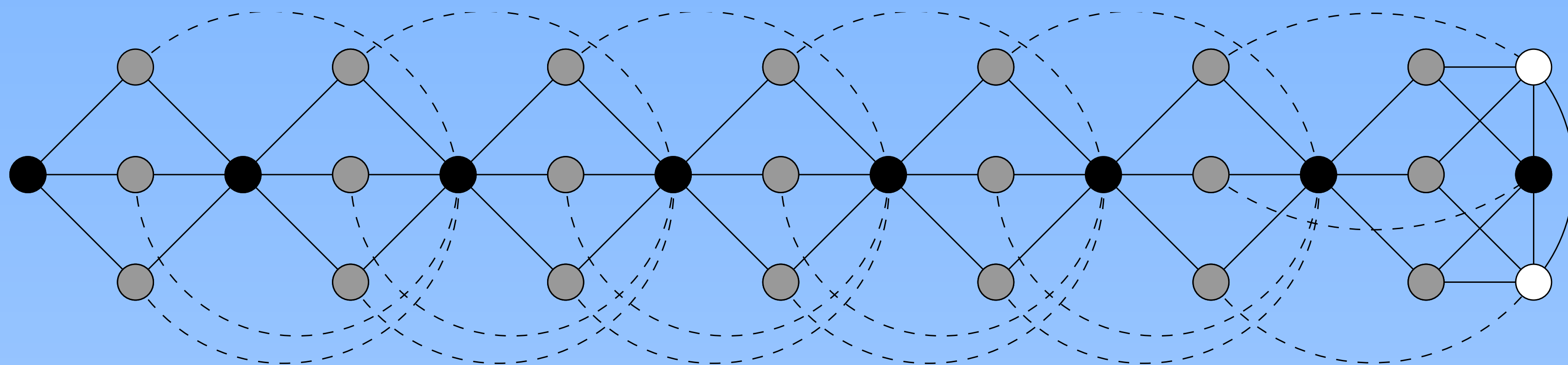
Tabelle der Knotengrade:

	Knotengrad
Knoten der ersten Clique K_1	j
Knoten aller unabhängigen Mengen $\overline{K_j}$	j
Knoten der abschließenden Clique K_j	$(j-1)+\sum_{i=1}^{j-1} i$
Knoten der i'ten Clique K_1 für $i=2,\ldots,j-1$	$i \cdot j$
Knoten aller anderen Cliquen K_1	j^2





$$|I_{Gr}| \ = \ h + 1$$



$$
\begin{aligned}
|I_{Gr}| &= h+1 \\
|I_{max}| &= j \cdot h
\end{aligned}
$$

Die Güte ist also

$$R_{Gr}(G) \geq \frac{h \cdot j}{h+1} = j - o(1) \ .$$

Die Güte ist also

$$R_{Gr}(G) \geq \frac{h \cdot j}{h+1} = j - o(1) \ .$$

Berechnung des Durchschnittsknotengrades $\overline{d}$:

$$\overline{d} \cdot n \quad = \quad j \cdot j \cdot h + j \cdot \left((j-1) + \sum_{i=1}^{j-1} i \right) + \sum_{i=1}^{j-1} i \cdot j + (h - j + 1) \cdot j^2$$

Die Güte ist also

$$R_{Gr}(G) \geq \frac{h \cdot j}{h+1} = j - o(1) \ .$$

Berechnung des Durchschnittsknotengrades $\overline{d}$:

$$\begin{aligned}
\overline{d} \cdot n &= j \cdot j \cdot h + j \cdot \left((j-1) + \sum_{i=1}^{j-1} i \right) + \sum_{i=1}^{j-1} i \cdot j + (h-j+1) \cdot j^2 \\
&= h \cdot j^2 + j \cdot (j-1) + j \cdot j \cdot (j-1) + j^2 \cdot (h-j+1)
\end{aligned}$$

Die Güte ist also

$$R_{Gr}(G) \geq \frac{h \cdot j}{h+1} = j - o(1) \ .$$

Berechnung des Durchschnittsknotengrades $\overline{d}$:

$$\begin{aligned}
\overline{d} \cdot n &= j \cdot j \cdot h + j \cdot \left((j-1) + \sum_{i=1}^{j-1} i \right) + \sum_{i=1}^{j-1} i \cdot j + (h-j+1) \cdot j^2 \\
&= h \cdot j^2 + j \cdot (j-1) + j \cdot j \cdot (j-1) + j^2 \cdot (h-j+1) \\
\Longleftrightarrow \qquad \overline{d} &= \frac{2h \cdot j^2 + j^2 - j}{h \cdot (j+1) + j}
\end{aligned}$$

Die Güte ist also

$$R_{Gr}(G) \geq \frac{h \cdot j}{h+1} = j - o(1)\ .$$

Berechnung des Durchschnittsknotengrades $\overline{d}$:

$$\begin{aligned}
\overline{d} \cdot n &= j \cdot j \cdot h + j \cdot \left((j-1) + \sum_{i=1}^{j-1} i \right) + \sum_{i=1}^{j-1} i \cdot j + (h-j+1) \cdot j^2 \\
&= h \cdot j^2 + j \cdot (j-1) + j \cdot j \cdot (j-1) + j^2 \cdot (h-j+1) \\
\Longleftrightarrow \qquad \overline{d} &= \frac{2h \cdot j^2 + j^2 - j}{h \cdot (j+1) + j} \\
&= 2j - 2 + \frac{2}{j+1} - o(1)\ .
\end{aligned}$$

Nach j umstellen:

Nach j umstellen:

$$j \quad \geq \quad \frac{\overline{d}+2}{2} - \frac{1}{j+1}$$

Nach j umstellen:

$$
\begin{aligned}
j &\geq \frac{\overline{d}+2}{2} - \frac{1}{j+1} \\
&\geq \frac{\overline{d}+2}{2} - \frac{2}{\overline{d}+2}
\end{aligned}
$$

Nach j umstellen:

$$
\begin{aligned}
j &\geq \frac{\overline{d}+2}{2} - \frac{1}{j+1} \\
&\geq \frac{\overline{d}+2}{2} - \frac{2}{\overline{d}+2} \\
&= \frac{\overline{d}+2}{2} - O(1/\overline{d}) \; .
\end{aligned}
$$

Nach j umstellen:

$$
\begin{aligned}
j \quad &\geq \quad \frac{\overline{d}+2}{2} - \frac{1}{j+1} \\
&\geq \quad \frac{\overline{d}+2}{2} - \frac{2}{\overline{d}+2} \\
&= \quad \frac{\overline{d}+2}{2} - O(1/\overline{d}) \ .
\end{aligned}
$$

Damit gilt

$$
R_{Gr}(G) \geq \frac{\overline{d}+2}{2} - O(1/\overline{d}) \ . \qquad \square
$$

Literatur

[1] M. M. Halldórsson und J. Radhakrishnan, *Greed is Good: Approximating Independent Sets in Sparse and Bounded-degree Graphs*, Proc. Twenty-Sixth Annual ACM Symp. on the Theory of Computing, Canada, 439-448, 1994.

[2] M. M. Halldórsson und J. Radhakrishnan, *Greed is Good: Approximating Independent Sets in Sparse and Bounded-degree Graphs*, Algorithmica, Springer Verlag, New York, 145-163, 1997.