Technische Universität Chemnitz

Professur für Theoretische Informatik und Informationssicherheit
Prof. Dr. Hanno Lefmann

# Studienarbeit

## Approximation von unabhängigen Mengen in dünnbesetzten Graphen

Matthias Baumgart

Matrikelnummer 22445

Chemnitz, 8. Dezember 2003

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Einleitung

Ein Graph $G = (V, E)$ besteht aus einer Knotenmenge $V$ und einer Kantenmenge $E$. Eine unabhängige Menge in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Menge von paarweise nicht miteinander durch Kanten verbundenen Knoten. Das Bestimmen einer unabhängigen Menge maximaler Kardinalität ist eines der zentralen Probleme der Informatik und von zentraler Bedeutung in der Kombinatorik sowie in der Graphentheorie.

Dieses Problem tritt in der Praxis meist in folgender Form auf: Gegeben seien $n$ Prozesse, welche um eine gewisse Anzahl von Ressourcen konkurrieren. Aufgabe ist es nun die größte Menge von Prozessen zu bestimmen, so dass nicht mehr als ein Prozess auf eine Ressource zugreift. Dieses Problem kann als Graph $G = (V, E)$ modelliert werden mit der Aufgabe eine unabhängige Menge maximaler Kardinalität zu bestimmen. Der Graph $G = (V, E)$ besitzt als Knotenmenge $V$ die einzelnen Prozesse, wobei mit jedem Prozess genau ein Knoten $v \in V$ asoziiert ist. Zwei Knoten sind durch Kanten miteinander verbunden, falls die dazugehörigen Prozesse auf gleiche Ressourcen zugreifen, d.h. zwischen diesen beiden Prozessen besteht eine Abhängigkeit. Findet man nun in diesem modellierten Graphen eine unabhängige Menge maximaler Kardinalität, dann erhält man also eine (maximale) Menge von Prozessen, welche gleichzeitig ausgeführt werden können, ohne dass Komplikationen – etwa durch gleichzeitiges Zugreifen auf die gleiche Ressource – auftreten können.

Es wurde nachgewiesen, dass das Problem des Bestimmens einer maximalen unabhängigen Menge $\mathcal{NP}$-vollständig ist [9]. Aus diesem Grund sind auch keine effizienten Algorithmen zur Lösung bekannt. Um dennoch eine unabhängige Menge mit einer möglichst großen Kardinalität bestimmen zu können, versucht man eine gute Lösung zu approximieren. Das Maß für die Qualität von Approximationsalgorithmen ist die Güte, welche als worst-case Verhältnis von Wert der Optimallösung und Wert der approximierten Lösung definiert ist.

Ein einfacher und gut erforschter Algorithmus für das Approximieren einer unabhängigen Menge maximaler Kardinalität ist der MIN-Greedy Algorithmus [1, 2]. Dieser Algorithmus wählt einen Knoten minimalen Grades, d.h. einen Knoten dessen Anzahl der Nachbarn mi-

nimal ist, fügt diesen zur unabhängigen Menge hinzu und löscht dann diesen Knoten, seine Nachbarn sowie die inzidenten Kanten. Eine genaue Analyse ist Gegenstand der Kapitel 3 und 4, wobei in letzterem optimale obere Schranken der Güte bezüglich des maximalen Knotengrades und des durchschnittlichen Knotengrades eines Graphens angegeben werden. Bessere Ergebnisse sind nur in Verbindung mit anderen Algorithmen möglich [4].
Kapitel 2 soll wesentliche Begriffe aus der Graphentheorie [6, 7] klären, welche im Laufe der Arbeit immer wiederkehren.

# Kapitel 2

# Grundlagen der Graphentheorie

## 2.1 Graphen

Zunächst werden einige grundlegende Begriffe aus der Graphentheorie vorgestellt.

**Definition 2.1 (Graph)** *Ein Graph $G = (V, E)$ besteht aus einer endlichen Menge $V$ von Knoten und einer Menge $E \subseteq \{\{v, w\} : v, w \in V \text{ und } v \neq w\}$ von (ungerichteten) Kanten. Die Kardinalität der Knotenmenge werden wir mit $n = |V|$ abkürzen.*

**Beispiel 2.2** Der Graph $G = (V, E)$ mit

$$\begin{aligned} V &:= \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ E &:= \{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\} \end{aligned}$$

kann graphisch wie folgt dargestellt werden.

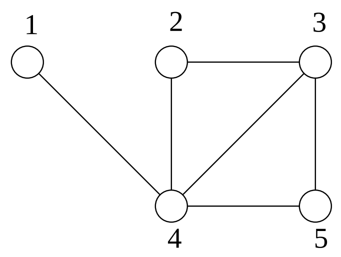


Abbildung 2.1: Visualisierung eines Graphen

**Definition 2.3 (Untergraph, induzierter Untergraph)** *Für einen Graphen $G = (V, E)$ heißt ein Graph $G' = (V', E')$ Untergraph, Teilgraph oder Subgraph von $G$, falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E \cap \{\{v, w\} : v, w \in V' \text{ und } v \neq w\}$ gilt. Ist sogar $E' = E \cap \{\{v, w\} : v, w \in V' \text{ und } v \neq w\}$ erfüllt, so bezeichnen wir $G'$ als induzierten Untergraphen von $G$.*

**Definition 2.4 (inzident, Nachbar, Nachbarschaft, Knotengrad, regulär)** *Es sei ein Graph $G = (V, E)$. Ein Knoten $w \in V$ ist inzident zu einem Knoten $v \in V$, falls $\{v, w\} \in E$ gilt. Man bezeichnet dann $w$ als Nachbarn von $v$. Die Nachbarschaft, d.h. die Menge aller Nachbarn eines Knotens $v$, bezeichnen wir mit $N(v) = \{w : \{v, w\} \in E\} \subseteq V$. Eine Kante $e \in E$ ist mit einem Knoten $v \in V$ inzident, falls $v \in e$ ist. Wir bezeichnen mit $d(v) = |N(v)|$ den Knotengrad, also die Anzahl der Nachbarn von $v$. Außerdem definieren wir mit $\Delta = \max\{d(v) : v \in V\}$ den maximalen Knotengrad und mit $\delta = \min\{d(v) : v \in V\}$ den minimalen Knotengrad. Der durchschnittliche Knotengrad eines Graphen wird mit $\overline{d} = 2 \cdot |E|/|V|$ abgekürzt. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt regulär, falls alle Knoten den gleichen Grad haben, d.h. es gilt $d(v) = \Delta = \delta$ für alle $v \in V$.*

## 2.2 Cliquen und unabhängige Mengen

**Definition 2.5 (Clique)** *Ein Graph (oder Untergraph) $G = (V, E)$ heißt Clique, falls $E = \{\{v, w\} : v, w \in V \text{ und } v \neq w\}$ gilt.*

In einer Clique ist also jeder Knoten mit jedem anderen Knoten durch eine Kante verbunden. Eine Clique auf $n$ Knoten werden wir mit $K_n$ bezeichnen. Das Gegenteil zu Cliquen sind die unabhängigen Mengen.

**Definition 2.6 (unabhängige Menge)** *Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Menge $V' \subseteq V$ heißt unabhängige Menge, wenn der induzierte Untergraph $G' = (V', E')$ keine Kante enthält, d.h. es gilt $E' = \emptyset$.*

Die Knoten einer unabhängigen Menge sind also paarweise nicht durch Kanten miteinander verbunden. Oftmals sucht man in einem Graphen $G = (V, E)$ nicht nur eine beliebige unabhängige Menge sondern eine unabhängige Menge maximaler Kardinalität. Mit $\overline{K_n}$ werden wir einen Teilgraphen auf $n$ Knoten bezeichnen, der eine unabhängige Menge ist.

**Definition 2.7 (Unabhängigkeitszahl, Unabhängigkeitsverhältnis)** *Es sei ein Graph $G = (V, E)$ auf $n$ Knoten sowie eine beliebige unabhängige Menge $I_{max}$ maximaler Kardinalität gegeben. Wir bezeichnen mit $\alpha = |I_{max}|$ die Unabhängigkeitszahl, also die Anzahl Knoten einer maximalen unabhängigen Menge. Weiterhin sei $\tau = \alpha/n$ das Unabhängigkeitsverhältnis des Graphen $G$.*

## 2.3 Bipartite Graphen und Matchings

**Definition 2.8 (bipartit)** *Wir nennen einen Graphen $G = (V = V_1 \dot{\cup} V_2, E)$ bipartit, falls $V$ aus zwei disjunkten Mengen $V_1$ und $V_2$ besteht und jede Kante nur zwischen Knoten aus $V_1$ und $V_2$ verläuft, d.h. $E \subseteq \{\{v, w\} : v \in V_1 \wedge w \in V_2 \text{ oder } v \in V_2 \wedge w \in V_1\}$. Sind alle Kanten zwischen $V_1$ und $V_2$ vorhanden, sprechen wir von einem vollständigen bipartiten Graphen $K_{n_1,n_2}$ mit $n_1 = |V_1|$ und $n_2 = |V_2|$.*

**Definition 2.9 (Matching)** *Es sei $G = (V, E)$ ein Graph und $M \subseteq E$ eine Menge von Kanten. Man bezeichnet $M$ als Matching, falls alle Kanten in $M$ paarweise nicht inzident sind, d.h. es gilt $e_1 \cap e_2 = \emptyset$ für alle Paare $e_1, e_2 \in M$ .*

Matchings werden oft im Zusammenhang mit bipartiten Graphen verwendet.

**Definition 2.10 (perfektes Matching)** *Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein Matching $M$ heißt perfekt, wenn jeder Knoten $v \in V$ Endknoten einer Kante aus $M$ ist.*

**Beispiel 2.11** Die Kantenmenge

$$M := \{\{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}\}$$

bildet im Graphen $G = (V_1 \dot\cup V_2, E)$ mit

$$\begin{aligned} V_1 &:= \{1, 2, 3\} \\ V_2 &:= \{4, 5, 6\} \\ E &:= \{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}\} \end{aligned}$$

ein perfektes Matching.

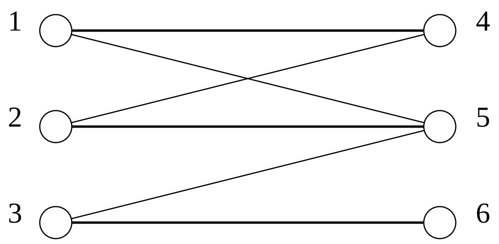


Abbildung 2.2: Beispiel eines perfekten Matchings

**Definition 2.12 (maximales Matching)** *Es sei $G = (V, E)$ ein Graph und $M$ ein Matching in $G$. Wir bezeichnen $M$ als maximales Matching, falls es kein Matching $M'$ mit größerer Kardinalität in $G$ gibt, d.h. es gilt $|M'| \leq |M|$ für alle Matchings $M'$ in $G$.*

## 2.4 Spezielle Graphen

In Kapitel 3 werden wir auf spezielle Graphen zurückgreifen, die wir an dieser Stelle definieren wollen.

**Definition 2.13 (Kreis)** *Ein Graph $G = (V, E)$ heißt Kreis $C_n$, $n = |V|$, wenn es eine Folge von Knoten $v_1, \ldots, v_n \in V$ gibt, so dass für die Kantenmenge $E$ gilt:*

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\} .$$

**Definition 2.14 (Stern)** *Ein Graph $G = (V, E)$ heißt Stern $S_n$, $n = |V|$, wenn es einen Knoten $v \in V$ gibt, welcher mit allen anderen Knoten verbunden ist und zwei beliebige Knoten $w_1, w_2 \in V \setminus \{v\}$ nicht durch eine Kante miteinander verbunden sind, d.h. es gilt*

$$E = \{\{v, w\} : \forall\, w \in V \setminus v\}\ .$$

Die Definitionen für Kreis und Stern wollen wir anhand eines Beispiels verdeutlichen.

**Beispiel 2.15** Der Graph $G_1 = (V_1, E_1)$ mit

$$\begin{aligned} V_1 &:= \{1, 2, 3, 4\} \\ E_1 &:= \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\} \end{aligned}$$

ist ein Kreis $C_4$.

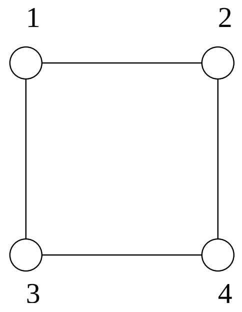


Abbildung 2.3: Graphische Darstellung eines Kreises $C_4$

Der Graph $G_2 = (V_2, E_2)$ mit

$$\begin{aligned} V_2 &:= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \\ E_2 &:= \{\{1, 8\}, \{2, 8\}, \{3, 8\}, \{4, 8\}, \{5, 8\}, \{6, 8\}, \{7, 8\}\} \end{aligned}$$

ist ein Stern $S_8$.

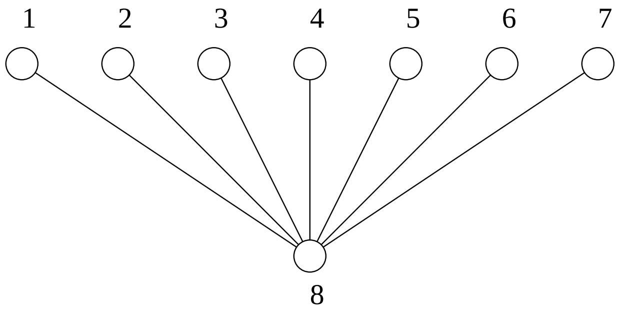


Abbildung 2.4: Graphische Darstellung eines Sterns $S_8$

# Kapitel 3

# Der MIN-Greedy Algorithmus

Der MIN-Greedy Algorithmus konstruiert eine unabhängige Menge $I$ eines Graphen $G = (V, E)$, indem er einen Knoten $v \in V$ minimalen Grades wählt, diesen zur Menge $I$ hinzufügt und dann den Knoten $v$, seine Nachbarn $N(v)$ sowie die inzidenten Kanten löscht. Dieses Verfahren wird auf dem reduzierten Graphen iteriert bis kein Knoten mehr vorhanden ist.

MIN-GREEDY$(G = (V, E))$
$I_{Gr} \leftarrow \emptyset$
**while** $V \neq \emptyset$ **do**
    wähle $v \in V$ mit $d(v) = \min_{w \in V}\{d(w)\}$
    $I_{Gr} \leftarrow I_{Gr} \cup \{v\}$
    $V \leftarrow V \setminus (\{v\} \cup N(v))$
    $E \leftarrow E \setminus \{e : e \in E \text{ und } e \cap (\{v\} \cup N(v)) \neq \emptyset\}$
**return** $I_{Gr}$

Dieser Algorithmus bestimmt eine bezüglich Inklusion maximale unabhängige Menge. Die Laufzeit hängt stark von den verwendeten Datenstrukturen ab. Günstig ist die Verwendung von Adjazenzlisten sowie einem Heap in dem jeder Knoten gespeichert wird, wobei an der Wurzel des Heaps der Knoten minimalen Grades steht. Dadurch erreicht man eine Laufzeit von $O((|V| + |E|) \cdot \log |V|)$. Die Laufzeiten der einzelnen Operationen auf dem Heap sind in [8, Seite 401] zu finden.

## 3.1 Absolute Größe einer MIN-Greedy-Lösung

Wir wollen nun den MIN-Greedy Algorithmus genauer analysieren. Sei $t$ die Anzahl Iterationen des Algorithmus und $d_i$ der Grad des ausgewählten Knotens im Graphen in der $i$'ten Iteration mit $i = 1, \ldots, t$.

**Satz 3.1** *Sei* $\overline{d}$ *der durchschnittliche Grad des Graphen* $G = (V, E)$. *Dann liefert der Algorithmus* MIN-GREEDY($G = (V, E)$) *eine unabhängige Menge* $I_{Gr}$ *mit*

$$|I_{Gr}| \geq \frac{n}{\overline{d}+1} .$$

**Beweis:** Der Knoten, der im $i$'ten Schritt ausgewählt wird, hat Knotengrad $d_i$, d.h. im $i$'ten Schritt werden $(d_i + 1)$ Knoten aus dem Graphen gelöscht. Nach $t$ Iterationen ist der Graph leer, also folgt

$$\sum_{i=1}^{t} (d_i + 1) = n . \tag{3.1}$$

Durch das Löschen der $(d_i + 1)$ Knoten verringert sich die Summe der Knotengrade mindestens um $d_i(d_i + 1)$. Beim Entfernen einer Kante aus dem Graphen wird diese Summe der Knotengrade offenbar um genau zwei kleiner, da jede Kante genau zwei Endknoten besitzt. Die gelöschten Kanten können wir in zwei Gruppen aufteilen:
*Gruppe 1:* Kanten, die beide Endknoten in der Menge $D_i = \{v\} \cup N(v)$ besitzen.
*Gruppe 2:* Kanten, die genau einen Endknoten in der Menge $D_i$ besitzen.
Da wir über die genaue Anzahl der Kanten in Gruppe 1 und Gruppe 2 keine Informationen besitzen, müssen wir die Anzahl der gelöschten Kanten pessimistisch abschätzen. Eine untere Schranke von $d_i(d_i + 1)/2 = \binom{d_i+1}{2}$ gelöschten Kanten erhalten wir, indem wir alle entfernten Kanten zu Gruppe 1 zählen. Demnach gilt

$$\frac{\overline{d} \cdot n}{2} = |E| \geq \sum_{i=1}^{t} \binom{d_i + 1}{2} . \tag{3.2}$$

Wir wollen damit die Größe einer unabhängigen Menge $I_{Gr}$, die der Greedy Algorithmus ausgibt, abschätzen. Dazu addieren wir (3.1) und zweimal (3.2):

$$n + 2 \cdot \left( \frac{\overline{d} \cdot n}{2} \right) \geq \sum_{i=1}^{t} (d_i + 1) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{t} \binom{d_i + 1}{2}$$

und erhalten

$$(\overline{d} + 1) \cdot n \geq \sum_{i=1}^{t} (d_i + 1)^2 . \tag{3.3}$$

Nun wendet man die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \leq \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}$$

an, wobei $x_i := d_i + 1$ und $y_i := 1$ gesetzt wird:

$$(d_1 + 1) + \ldots + (d_t + 1) \leq \sqrt{(d_1 + 1)^2 + \ldots + (d_t + 1)^2} \cdot \sqrt{t}$$

und erhält mit (3.1)

$$\sum_{i=1}^{t} (d_i + 1)^2 \geq \frac{\left( \sum_{i=1}^{t} (d_i + 1) \right)^2}{t} = \frac{n^2}{t} . \tag{3.4}$$

Die Formeln (3.4) und (3.3) liefern

$$(\overline{d}+1)\cdot n \geq \frac{n^2}{t} \ .$$

Nach $t$ umgestellt ergibt dies

$$|I_{Gr}| = t \geq \frac{n}{\overline{d}+1} \ ,$$

womit der Satz bewiesen ist, da der Greedy Algorithmus in jeder Iteration einen Knoten zur unabhängigen Menge $I_{Gr}$ hinzufügt. □

## 3.2 Relative Größe einer MIN-Greedy-Lösung

Im Folgenden werden wir die vom Greedy Algorithmus erhaltene Lösung als Funktion von $\tau = \alpha/n$ betrachten, wobei $\tau$ das Unabhängigkeitsverhältnis – also der Quotient aus Unabhängigkeitszahl $\alpha$ und Knotenanzahl $n$ – ist.

**Satz 3.2** *Sei $\overline{d}$ der durchschnittliche Grad und $\tau$ das Unabhängigkeitsverhältnis des Graphen $G = (V, E)$. Dann gibt* MIN-GREEDY$(G = (V, E))$ *eine unabhängige Menge $I_{Gr}$ aus mit*

$$|I_{Gr}| \geq \frac{(1+\tau^2)\cdot n}{\overline{d}+1+\tau} \ .$$

**Beweis:** Der Beweis dieses Satzes verläuft analog zu dem Beweis von Satz 3.1. Sei $I_{max}$ eine beliebige – aber feste – unabhängige Menge des Graphen $G = (V, E)$ mit Kardinalität $|I_{max}| = \alpha$. Wir betrachten nun zusätzlich die Anzahl Knoten, die in jedem Schritt vom Greedy Algorithmus gelöscht werden und zu $I_{max}$ gehören. Sei $k_i$ die Anzahl dieser Knoten im Schritt $i$. Offensichtlich gilt

$$\sum_{i=1}^{t} k_i = \alpha \ . \tag{3.5}$$

Im Beweis von Satz 3.1 haben wir bereits festgestellt, dass in der $i$'ten Iteration mindestens $d_i(d_i + 1)$ Knotengrade gelöscht werden. Die dabei gelöschten Kanten hatten wir in zwei Gruppen aufgeteilt, deren Kardinalitäten aufgrund fehlender Informationen nicht exakt zu bestimmen waren. Diesen Mangel können wir nun etwas beheben, da wir wissen, dass in der Menge $D_i$ der gelöschten Knoten genau $k_i$ zu der unabhängigen Menge $I_{max}$ gehören. Zwischen diesen Knoten dürfen – nach Definition einer unabhängigen Menge – keine Kanten verlaufen. Daher müssen diese Knoten auch mit Knoten außerhalb der Menge $D_i$ inzidieren. Entsprechend erhalten wir für die Anzahl Kanten in Gruppe 2 eine untere Schranke von $k_i(k_i-1)/2$ und können die Anzahl entfernter Kanten mit mindestens $d_i(d_i+1)/2 + k_i(k_i - 1)/2 = \binom{d_i+1}{2} + \binom{k_i}{2}$ abschätzen. Damit erweitern wir die Formel (3.2) zu

$$\frac{\overline{d}\cdot n}{2} = |E| \geq \sum_{i=1}^{t} \left( \binom{d_i+1}{2} + \binom{k_i}{2} \right) \ . \tag{3.6}$$

Wir werden damit nun wieder die Größe einer unabhängigen Menge $I_{Gr}$, die der Greedy-Algorithmus berechnet, abschätzen. Hierzu addieren wir (3.1), (3.5) und zweimal (3.6):

$$\begin{aligned} n+\alpha+2\cdot\binom{\overline{d}\cdot n}{2} &\geq \sum_{i=1}^{t}(d_i+1)+\sum_{i=1}^{t}k_i+2\cdot\sum_{i=1}^{t}\left(\binom{d_i+1}{2}+\binom{k_i}{2}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{t}\left((d_i+1)+k_i+d_i(d_i+1)+k_i(k_i-1)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{t}\left((d_i+1)^2+k_i^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^{t}(d_i+1)^2+\sum_{i=1}^{t}k_i^2 \,. \end{aligned}$$

Wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt

$$\sum_{i=1}^{t}k_i^2 \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{t}k_i\right)^2}{t}=\frac{\alpha^2}{t}\,. \tag{3.7}$$

Zusammen mit (3.4) erhält man

$$\alpha+n+\overline{d}\cdot n \geq \frac{n^2+\alpha^2}{t}\,.$$

Ersetzen von $\alpha$ mit $\tau\cdot n$ ergibt

$$(\tau+1+\overline{d})\cdot n \geq \frac{(1+\tau^2)\cdot n^2}{t}\,.$$

Umstellen nach $t$ liefert die Behauptung

$$|I_{Gr}|=t\geq\frac{(1+\tau^2)\cdot n}{\overline{d}+1+\tau}\,,$$

da in jeder Iteration $i=1,\ldots,t$ ein Knoten zur unabhängigen Menge $I_{Gr}$ hinzugefügt wird.□

Die gerade bewiesene Aussage ist nicht schlechter als die Aussage aus Satz 3.1:

$$\begin{aligned} & \frac{n}{\overline{d}+1} &\leq\ & \frac{(1+\tau^2)\cdot n}{\overline{d}+1+\tau} \\ \iff\ & \overline{d}+1+\tau &\leq\ & \overline{d}+1+\overline{d}\cdot\tau^2+\tau^2 \\ \iff\ & 1 &\leq\ & (\overline{d}+1)\cdot\frac{\alpha}{n} \qquad (\tau=\alpha/n) \\ \iff\ & \frac{n}{\overline{d}+1} &\leq\ & \alpha\,. \end{aligned}$$

Das ist wegen Satz 3.1 eine wahre Aussage.
Eine Erweiterung des Beweises von Satz 3.2 liefert den nächsten Satz.

**Satz 3.3** *Sei $\Delta$ der maximale Grad und $\tau$ das Unabhängigkeitsverhältnis des Graphen $G = (V, E)$. Dann gibt der Algorithmus* MIN-GREEDY$(G = (V, E))$ *eine unabhängige Menge $I_{Gr}$ aus mit*

$$|I_{Gr}| \geq \frac{1 - \tau \cdot (1 - \tau)}{(1 - \tau) \cdot \Delta + 1} \cdot n \ .$$

**Beweis:** Wir halten noch einmal fest: Im $i$'ten Schritt wird ein Knoten $v \in V$ mit Knotengrad $d_i$ gewählt, es wird $I_{Gr} := I_{Gr} \cup \{v\}$ gesetzt und danach wird der Knoten $v$, seine Nachbarschaft $N(v)$ sowie die Kanten, welche mit Knoten aus $D_i := \{v\} \cup N(v)$ inzidieren, gelöscht. Wir teilen diese inzidenten Kanten nun wie folgt ein.
*Gruppe 1:* In dieser Gruppe fassen wir die Anzahl der in der $i$'ten Iteration gelöschten Kanten, die genau einen Endknoten in der Menge $D_i$ besitzen, zusammen. Ihre Anzahl bezeichnen wir mit $a_i$.
Für alle anderen gelöschten Kanten gilt, dass beide Endknoten in der Menge $D_i$ zu finden sind. Diese Kanten teilen wir nun noch bezüglich der beliebigen – aber festen – unabhängigen Menge $I_{max}$ ein.
*Gruppe 2:* Diese Kanten, deren Anzahl $b_i$ ist, besitzen einen Endknoten, der zur Menge $I_{max} \cap D_i$ gehört. Der andere Endknoten gehört entsprechend zur Menge $D_i \setminus I_{max}$.
*Gruppe 3:* Hierzu gehören alle restlichen gelöschten Kanten, also solche, die beide Endknoten in $D_i \setminus I_{max}$ besitzen. Ihre Anzahl halten wir mit $c_i$ fest.
Die Summe der Knotengrade bezüglich Knoten aus $D_i$ ist damit exakt $a_i + 2(b_i + c_i)$ und es gilt

$$a_i + 2(b_i + c_i) \geq d_i(d_i + 1) \ . \tag{3.8}$$

Unter den $(d_i + 1)$ Knoten sind genau $k_i$ Knoten aus der unabhängigen Menge $I_{max}$. Diese $k_i$ Knoten können innerhalb von $D_i$ nur mit Knoten, die nicht in $I_{max}$ enthalten sind, durch eine Kante verbunden sein. Davon gibt es $d_i + 1 - k_i$ viele Knoten. Damit folgt

$$b_i \leq k_i(d_i + 1 - k_i) \ . \tag{3.9}$$

Multipliziert man (3.9) mit (-1), dann dreht sich das Relationszeichen der Ungleichung um:

$$-b_i \geq -k_i(d_i + 1 - k_i) \ . \tag{3.10}$$

Addieren von (3.8) und (3.10) ergibt

$$\begin{aligned}
a_i + b_i + 2c_i &\geq d_i(d_i + 1) - k_i(d_i + 1 - k_i) \\
&= \frac{d_i(d_i + 1)}{2} + \frac{d_i(d_i + 1)}{2} - k_i(d_i + 1 - k_i) \\
&= \binom{d_i + 1}{2} + \frac{d_i(d_i + 1) - 2k_i(d_i + 1 - k_i)}{2} \\
&= \binom{d_i + 1}{2} + \frac{k_i^2 - k_i}{2} + \frac{d_i^2 - 2d_i k_i + k_i^2 + d_i - k_i}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{d_i+1}{2} + \frac{k_i(k_i-1)}{2} + \frac{(d_i-k_i)^2+(d_i-k_i)}{2} \\
&= \binom{d_i+1}{2} + \binom{k_i}{2} + \frac{(d_i-k_i)\cdot(d_i-k_i+1)}{2} \\
&= \binom{d_i+1}{2} + \binom{k_i}{2} + \binom{d_i-k_i+1}{2} . \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Da die Anzahl der gelöschten Kanten in der $i$'ten Iteration genau $a_i + b_i + c_i$ ist, gilt wegen (3.11) das folgende:

$$|E| = \sum_{i=1}^{t} (a_i + b_i + c_i) \geq \sum_{i=1}^{t} \left( \binom{d_i+1}{2} + \binom{k_i}{2} + \binom{d_i+1-k_i}{2} - c_i \right) . \qquad (3.12)$$

Als nächstes betrachten wir die Summe der Grade aller Knoten, die nicht zu der maximalen unabhängigen Menge $I_{max}$ gehören. Für diese Summe ist $(n-\alpha)\cdot\Delta$ eine obere Schranke. Da jede Kante, die mit einem Knoten aus $I_{max}$ inzidiert, einmal gezählt wird und Kanten, die ganz außerhalb von $I_{max}$ liegen, doppelt gezählt werden, gilt folgende Ungleichung:

$$(n-\alpha)\cdot\Delta \geq |E| + \sum_{i=1}^{t} c_i . \qquad (3.13)$$

Setzt man (3.12) in (3.13) ein und multipliziert beide Seiten mit 2 erhält man

$$\begin{aligned}
2(n-\alpha)\cdot\Delta &\geq 2\cdot\sum_{i=1}^{t} \left( \binom{d_i+1}{2} + \binom{k_i}{2} + \binom{d_i+1-k_i}{2} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{t} \left( d_i(d_i+1) + k_i(k_i-1) + (d_i+1-k_i)\cdot(d_i-k_i) \right) . \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Aufgrund von (3.1) gilt

$$2n = \sum_{i=1}^{t} \left( (d_i+1) + k_i + (d_i+1-k_i) \right) .$$

Diese Gleichung addieren wir zu (3.14):

$$2(n-\alpha)\cdot\Delta + 2n \geq \sum_{i=1}^{t} \left( (d_i+1)^2 + k_i^2 + (d_i+1-k_i)^2 \right) . \qquad (3.15)$$

Wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt

$$\sum_{i=1}^{t} (d_i+1-k_i)^2 \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{t}(d_i+1-k_i)\right)^2}{t} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{t}(d_i+1) - \sum_{i=1}^{t} k_i\right)^2}{t} = \frac{(n-\alpha)^2}{t} .$$

Dieses setzen wir zusammen mit (3.4) und (3.7) in (3.15) ein:

$$2(n-\alpha)\cdot\Delta + 2n \geq \frac{n^2}{t} + \frac{\alpha^2}{t} + \frac{(n-\alpha)^2}{t} .$$

Nun ersetzt man wieder $\alpha$ durch $\tau \cdot n$:

$$\begin{aligned} 2n \cdot ((1-\tau) \cdot \Delta + 1) &\geq \frac{2n^2 + 2\tau^2 \cdot n^2 - 2\tau \cdot n^2}{t} \\ &= \frac{2n^2}{t} \cdot (1 + \tau^2 - \tau) \, . \end{aligned}$$

Nach $t$, der Anzahl Knoten, die eine Lösung des Greedy Algorithmus enthält, umgestellt folgt die Behauptung:

$$|I_{Gr}| = t \geq \frac{1 - \tau \cdot (1-\tau)}{(1-\tau) \cdot \Delta + 1} \cdot n \, .$$

□

Wir können jedoch keine Aussage darüber treffen, ob Satz 3.3 besser oder schlechter als Satz 3.2 ist. Dazu betrachten wir zunächst einen Kreis $C_n$ auf $n$ Knoten, wobei wir $n \equiv 0 \bmod 2$ zum einfacheren Rechnen voraussetzen. Dann gilt offenbar für das Unabhängigkeitsverhältnis $\tau = 1/2$, für den durchschnittlichen Knotengrad $\overline{d} = 2$ und für den Maximalgrad $\Delta = 2$. Damit erhalten wir nach Satz 3.2

$$\begin{aligned} |I_{Gr}| &\geq \frac{(1+\tau^2) \cdot n}{\overline{d} + 1 + \tau} \\ &= \frac{(1 + 1/4) \cdot n}{2 + 1 + 1/2} \\ &= \frac{5}{14} n \end{aligned}$$

und nach Satz 3.3

$$\begin{aligned} |I_{Gr}| &\geq \frac{1 - \tau \cdot (1-\tau)}{(1-\tau) \cdot \Delta + 1} \cdot n \\ &= \frac{1 - 1/2 \cdot (1 - 1/2)}{(1 - 1/2) \cdot 2 + 1} \cdot n \\ &= \frac{3}{8} n \, , \end{aligned}$$

also liefert Satz 3.3 hier eine besser untere Schranke.

Betrachten wir nun einen Stern $S_n$ auf $n$ Knoten. Die Unabhängigkeitszahl ist $\alpha = n-1$. Damit ist das Unabhängigkeitsverhältnis $\tau$ durch $\tau = (n-1)/n$ bestimmt. Für den durchschnittlichen Knotengrad gilt $\overline{d} = 2(n-1)/n$ und für den maximalen Knotengrad $\Delta = n - 1$. In Satz 3.2 eingesetzt erhält man

$$\begin{aligned} |I_{Gr}| &\geq \frac{(1+\tau^2) \cdot n}{\overline{d} + 1 + \tau} \\ &= \frac{(1 + ((n-1)/n)^2) \cdot n}{2(n-1)/n + 1 + (n-1)/n} \\ &= \frac{2n^2 - 2n + 1}{4n - 3} \\ &= \frac{1}{2} n - \frac{1}{8} + \frac{5}{8(4n-3)} \, , \end{aligned} \tag{3.16}$$

und für Satz 3.3 folgt

$$\begin{aligned} |I_{Gr}| &\geq \frac{1-\tau\cdot(1-\tau)}{(1-\tau)\cdot\Delta+1}\cdot n \\ &= \frac{1-(n-1)/n+((n-1)/n)^2}{(1-(n-1)/n)\cdot(n-1)+1}\cdot n \\ &= \frac{n^2-n+1}{2n-1} \\ &= \frac{1}{2}n-\frac{1}{4}+\frac{3}{4(2n-1)}\ . \end{aligned} \tag{3.17}$$

Vergleicht man (3.16) mit (3.17) dann ergibt sich für $n > 3$ folgende Äquivalenz:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}n-\frac{1}{8}+\frac{5}{8(4n-3)} &>& \frac{1}{2}n-\frac{1}{4}+\frac{3}{4(2n-1)} \\ \Longleftrightarrow\quad & (4n+2)\cdot(8n-4) &>& 24(4n-3) \\ \Longleftrightarrow\quad & 32n^2-96n-2 &>& 0\ . \end{aligned}$$

Damit liefert Satz 3.2 für Sterne $S_n$ mit $n > 3$ eine bessere untere Schranke für die Anzahl Knoten einer unabhängigen Menge $I_{Gr}$, welche der MIN-Greedy Algorithmus ausgibt, als der Satz 3.3.

**Korollar 3.4** *Die in den Sätzen 3.1, 3.2 und 3.3 vorgestellten unteren Schranken der Kardinalität einer unabhängigen Menge, welche der MIN-Greedy Algorithmus bestimmt, sind optimal für $n$-elementige Cliquen $K_n$ sowie $n$-elementige unabhängige Mengen $\overline{K_n}$.*

**Beweis:** Wir betrachten zunächst $n$-elementige unabhängige Mengen $\overline{K_n}$. Das Unabhängigkeitsverhältnis $\tau$ ist hier offenbar $\tau = 1$. Für den durchschnittlichen Knotengrad $\overline{d}$ sowie den maximalen Knotengrad $\Delta$ gilt $\overline{d} = \Delta = 0$, da der Graph $\overline{K_n}$ keinerlei Kanten enthält. Wir unterscheiden entsprechend der Sätze in 3 Fälle:
*Satz 3.1:*

$$\begin{aligned} |I_{Gr}| &\geq \frac{n}{\overline{d}+1} \\ &= n\ . \end{aligned}$$

*Satz 3.2:*

$$\begin{aligned} |I_{Gr}| &\geq \frac{(1+\tau^2)\cdot n}{\overline{d}+1+\tau} \\ &= n\ . \end{aligned}$$

*Satz 3.3:*

$$\begin{aligned} |I_{Gr}| &\geq \frac{1-\tau\cdot(1-\tau)}{(1-\tau)\cdot\Delta+1}\cdot n \\ &= n\ . \end{aligned}$$

In allen 3 Fällen erhalten wir eine unabhängige Menge $I_{Gr}$ der Kardinalität mindestens $n$, was offenbar optimal ist, da jede maximale unabhängige Menge $I_{max}$ die Kardinalität $|I_{max}| = n$ hat.
Betrachten wir nun $n$-elementige Cliquen $K_n$. Das Unabhängigkeitsverhältnis ist offenbar $\tau = 1/n$. Der Durchschnittsgrad $\overline{d}$ und der Maximalgrad $\Delta$ haben wiederum den gleichen Wert $\overline{d} = \Delta = n - 1$. Wir unterscheiden wieder 3 Fälle:
*Satz 3.1:*

$$\begin{aligned} |I_{Gr}| &\geq \frac{n}{\overline{d}+1} \\ &= \frac{n}{n-1+1} \\ &= 1\ . \end{aligned}$$

*Satz 3.2:*

$$\begin{aligned} |I_{Gr}| &\geq \frac{(1+\tau^2)\cdot n}{\overline{d}+1+\tau} \\ &= \frac{(1+1/n^2)\cdot n}{n-1+1+1/n} \\ &= \frac{(n^2+1)/n}{(n^2+1)/n} \\ &= 1\ . \end{aligned}$$

*Satz 3.3:*

$$\begin{aligned} |I_{Gr}| &\geq \frac{1-\tau\cdot(1-\tau)}{(1-\tau)\cdot\Delta+1}\cdot n \\ &= \frac{1-1/n\cdot(1-1/n)}{(1-1/n)\cdot(n-1)+1}\cdot n \\ &= \frac{1-(n-1)/n^2}{n-1-(n-1)/n+1}\cdot n \\ &= \frac{(n^2-n+1)/n^2}{(n^2-n+1)/n}\cdot n \\ &= 1\ . \end{aligned}$$

Wir erhalten also in allen 3 Fällen eine unabhängige Menge $I_{Gr}$ der Kardinalität mindestens 1. Dies ist offenbar optimal, da es in einer Clique nur einen unabhängigen Knoten geben kann. □

# Kapitel 4

# Die Güte des MIN-Greedy

In diesem Kapitel wollen wir die Güte des MIN-Greedy Algorithmus analysieren. Zunächst werden wir jedoch definieren, was wir unter Güte verstehen.

**Definition 4.1 (Güte, worst-case Güte)** *Für eine Eingabe $I$ sei $w(A(I))$ der Wert der Lösung $A(I)$ eines Algorithmus $A$ für ein Optimierungsproblem $\Pi$ und $OPT(I)$ der Wert einer optimalen Lösung. Dann ist die Güte der Lösung $A(I)$*

$$R_A(I) = \max\left\{\frac{w(A(I))}{OPT(I)}, \frac{OPT(I)}{w(A(I))}\right\} .$$

*Die worst-case Güte ist definiert durch*

$$R_A := \inf\left\{r \geq 1 \colon R_A(I) \leq r \;\forall\, I \in D_\Pi\right\} ,$$

*wobei $D_\Pi$ die Menge der zulässigen Eingaben für $\Pi$ ist.*

Im Folgenden werden wir nicht zwischen „Güte“ und „worst-case Güte“ unterscheiden, sondern nur noch die worst-case Güte betrachten, welche wir für den MIN-Greedy mit $R_{Gr}$ abkürzen werden.

## 4.1 Obere Schranken

### 4.1.1 Eine einfache obere Schranke der Güte

Eine Güte von $R_{Gr} \leq \Delta + 1$ kann offenbar sehr leicht erreicht werden [5]. Wir werden hier ein geringfügig besseres Ergebnis beweisen. Dazu benötigen wir jedoch zunächst das folgende Lemma.

**Lemma 4.2** *In einem Graphen $G = (V, E)$ mit minimalem Grad $\delta$ und maximalem Grad $\Delta$ gilt für die Unabhängigkeitszahl $\alpha$:*

$$\alpha \leq \frac{n \cdot \Delta}{\Delta + \delta} .$$

**Beweis:** Sei $I$ eine beliebige unabhängige Menge im Graphen $G = (V, E)$. Da $\delta$ der minimale Knotengrad ist, verlassen mindestens $\delta \cdot |I|$ Kanten diese unabhängige Menge. Andererseits inzidieren die restlichen $(n - |I|)$ Knoten jeweils mit höchstens $\Delta$ Kanten, so dass

$$\delta \cdot |I| \leq \Delta \cdot (n - |I|)$$

gelten muss. Nach $|I|$ umgestellt erhält man die Behauptung:

$$\alpha = |I| \leq \frac{n \cdot \Delta}{\Delta + \delta} .$$

□

**Satz 4.3** *Sei $\Delta$ der maximale Grad eines Graphen $G = (V, E)$. Dann liefert der MIN-Greedy bei Eingabe des Graphen $G$ eine Lösung mit*

$$R_{Gr}(G) \leq \Delta - 1 .$$

**Beweis:** Diese Aussage werden wir im folgenden für reguläre und nicht reguläre Komponenten des Graphen $G = (V, E)$ getrennt beweisen.
Sei $G' = (V', E')$ mit $n' = |V'|$ eine reguläre Komponente von $G$. Dann gilt für die Größe einer unabhängigen Menge $I$ von $G'$ nach Lemma 4.2

$$|I| \leq \frac{n' \cdot \Delta}{2\Delta} = \frac{n'}{2} .$$

Wegen Satz 3.1 und $\overline{d} = \Delta$, da $G'$ regulär, ist

$$|I_{Gr}| \geq \frac{n'}{\Delta + 1} .$$

Die Güte ist also

$$R_{Gr}(G) \leq \frac{n' \cdot (\Delta + 1)}{2n'} = \frac{\Delta + 1}{2} .$$

Für $\Delta \geq 3$ gilt

$$R_{Gr}(G) \leq \frac{\Delta + 1}{2} \leq \Delta - 1 .$$

Für Graphen mit Maximalgrad 2 verfährt der Greedy Algorithmus optimal, da wir dann nur Pfade und Kreise bearbeiten.
Sei nun $G' = (V', E')$ eine nicht reguläre Komponente. Dann gibt es einen Knoten $v \in V'$ mit $d(v) \leq \Delta - 1$, da sonst die Komponente regulär wäre. In allen weiteren Restgraphen gibt es dann wiederum einen Knoten $v$ mit $d(v) \leq \Delta - 1$ – auch wenn einer dieser Restgraphen dann regulär ist. Demnach entfernt Greedy in jedem Schritt höchstens $\Delta$ Knoten, wobei einer dieser Knoten in die unabhängige Menge $I_{Gr}$ eingeht. Am Ende enthält $I_{Gr}$ also mindestens $n'/\Delta$ unabhängige Knoten. Solange ein Knoten $v \in V'$ mit Grad $d(v) = 1$ gewählt wird, verhält sich der Greedy Algorithmus optimal, da entweder der Knoten mit Grad 1 oder sein Nachbar in jeder maximalen unabhängigen Menge enthalten ist. Aus diesem Grund sei ohne

Einschränkung der Allgemeinheit $\delta \geq 2$. Wegen Lemma 4.2 ist die Unabhängigkeitszahl $\alpha$ nach oben beschränkt durch $n'\Delta/(\Delta+2)$. Die Güte ist also

$$\begin{aligned} R_{Gr}(G) &\leq \frac{n' \cdot \Delta/(\Delta+2)}{n'/\Delta} \\ &= \frac{\Delta^2}{\Delta+2} \\ &= \Delta - 2 + \frac{4}{\Delta+2} \\ &\leq \Delta - 1\,. \end{aligned}$$ □

Es gibt keine Graphen $G = (V, E)$ mit Maximalgrad $\Delta \geq 3$, die diese obere Schranke mit Gleichheit erfüllen. Dieses gilt, da wir in Satz 4.5 noch eine bessere Schranke bezüglich des Maximalgrades angeben werden.

### 4.1.2 Verbesserte Gütegarantien

**Satz 4.4** *Sei $\overline{d}$ der Durchschnittsgrad eines Graphen $G = (V, E)$. Dann gilt für die Güte des MIN-Greedy*

$$R_{Gr}(G) \leq \frac{\overline{d}+2}{2}\,.$$

**Beweis:** Zum Beweis dieses Satzes verwenden wir Satz 3.2. Eine maximale unabhängige Menge hat die Größe $\alpha = \tau \cdot n$. Damit ist die Güte bestimmt durch

$$\begin{aligned} R_{Gr}(G) &\leq \frac{\tau \cdot n \cdot (\overline{d} + 1 + \tau)}{(1+\tau^2) \cdot n} \\ &= \frac{\overline{d} \cdot \tau + \tau + \tau^2}{1+\tau^2}\,. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Wir betrachten diesen Term nun als Funktion von $\tau$:

$$f(\tau) = \frac{\tau^2 + \overline{d} \cdot \tau + \tau}{1+\tau^2}\,,$$

wobei $\overline{d}$ beliebig aber fest sei. Die erste Ableitung der Funktion $f(\tau)$ ist

$$\begin{aligned} f'(\tau) &= \frac{(1+\tau^2) \cdot (\overline{d} + 1 + 2\tau) - (\overline{d} \cdot \tau + \tau + \tau^2) \cdot 2\tau}{(1+\tau^2)^2} \\ &= \frac{(\overline{d}+1) \cdot (1-\tau^2) + 2\tau}{(1+\tau^2)^2}\,. \end{aligned}$$

Da $f'(\tau) > 0$ für $\tau \in (0, 1]$ gilt, ist die Funktion $f(\tau)$ im gesamten Intervall monoton steigend und nimmt ihr Maximum folglich für $\tau = 1$ an. Dies wird auch durch einen Plot ersichtlich:

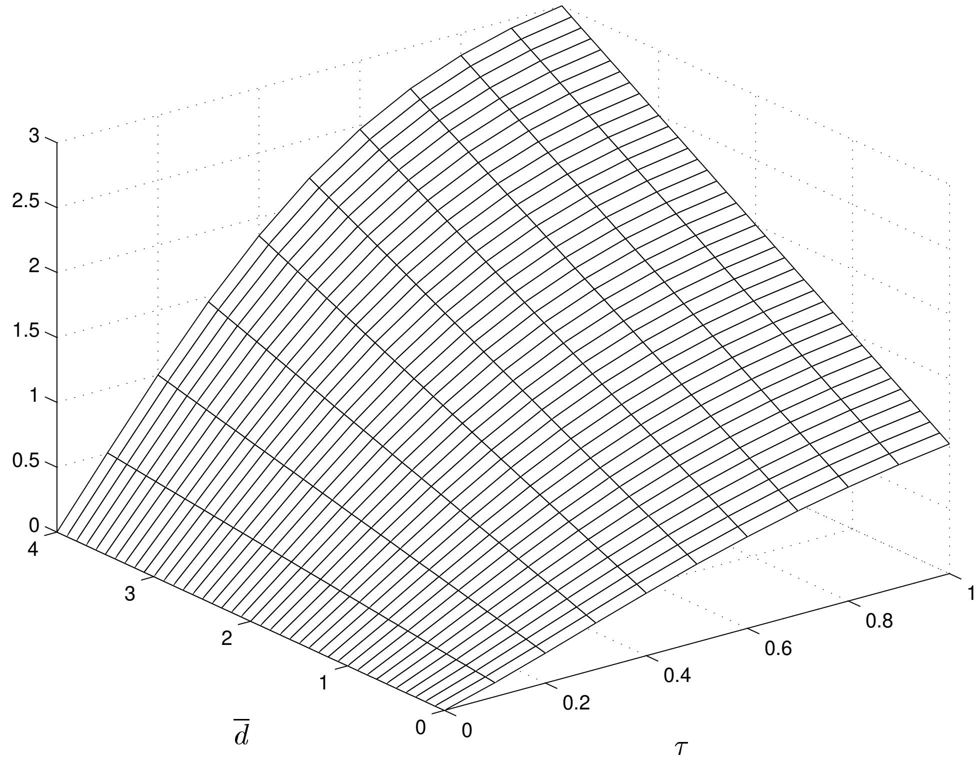


Abbildung 4.1: Plot des Graphen der Funktion $f(\tau)$ für $\overline{d} \in [0,4]$

Wir setzen also $\tau = 1$ in (4.1) ein und erhalten die Behauptung

$$R_{Gr}(G) \leq \frac{\overline{d}+2}{2}\ . \qquad \square$$

Um Satz 4.4 zu zeigen, haben wir $\tau = 1$ gesetzt, da in diesem Fall die Funktion $f(\tau)$ ihr Maximum hatte. Das Setzen von $\tau = 1$ impliziert jedoch, dass $\overline{d} = 0$ gilt und der ganze Graph $G = (V, E)$ eine unabhängige Menge bildet. Eine bessere obere Schranke für $\tau$ erhalten wir, wenn wir uns einen Graphen mit $\alpha$ unabhängigen Knoten, die vollständig mit einer Clique auf $n - \alpha$ Knoten verbunden sind, vorstellen. In diesem Fall gilt

$$\begin{array}{lrcl} & |E| = \dfrac{n \cdot \overline{d}}{2} & = & \alpha \cdot (n-\alpha) + \dbinom{n-\alpha}{2} \\ \Longleftrightarrow & n \cdot \overline{d} & = & 2\alpha \cdot n - 2\alpha^2 + (n-\alpha)\cdot(n-\alpha-1) \\ & & = & -\alpha^2 + \alpha + n^2 - n \\ \Longleftrightarrow & \alpha & = & \dfrac{1}{2} + \sqrt{n^2 - n \cdot \overline{d} - n + \dfrac{1}{4}} \end{array}$$

Der Wert von $\alpha$ ist also durch

$$\alpha \leq \sqrt{n^2 - n \cdot \overline{d}}$$

beschränkt und wir erhalten entprechend für $\tau$ eine obere Schranke von

$$\tau = \frac{\alpha}{n} \leq \sqrt{1 - \frac{\overline{d}}{n}} \; .$$

Setzen wir dieses nun in (4.1) ein, dann folgt

$$\begin{aligned} R_{Gr}(G) &\leq \frac{(1-\overline{d}/n) + (1+\overline{d}) \cdot \sqrt{1-\overline{d}/n}}{2-\overline{d}/n} \\ &\leq \frac{(1-\overline{d}/n) + (1+\overline{d}) \cdot (1-\overline{d}/(2n))}{2-\overline{d}/n} \\ &= \frac{\overline{d}+2}{2} - \frac{\overline{d}}{4n-2\overline{d}} \\ &= \frac{\overline{d}+2}{2} - O(\overline{d}/n) \; , \end{aligned}$$

womit wir sogar eine geringfügig bessere Schranke als in Satz 4.4 gezeigt haben.

Im Folgenden wollen wir auch verbesserte Aussagen bezüglich des Maximalgrades $\Delta$ machen. Dazu analysieren wir jede Iteration des MIN-Greedy Algorithmus noch genauer.
Sei

$$t_{d,k} = |\{i \colon d_i = d \text{ und } k_i = k\}| \qquad \text{für } d = 0,1,\ldots,\Delta \text{ und } k = 0,1,\ldots,\Delta \tag{4.2}$$

die Anzahl Iterationen des MIN-Greedy, in denen ein Knoten $v \in V$ mit Grad $d$ gewählt wurde und genau $k$ Knoten der maximalen unabhängigen Menge $I_{max}$ gelöscht wurden. Für die Größe einer unabhängigen Menge, die der MIN-Greedy ausgibt, gilt

$$|I_{Gr}| = t = \sum_{d,k} t_{d,k} \; .$$

Mit (4.2) lassen sich (3.1), (3.5) und (3.15) wie folgt ausdrücken:

$$\sum_{d,k} (d+1) \cdot t_{d,k} = n \tag{4.3}$$

$$\sum_{d,k} k \cdot t_{d,k} = \alpha \tag{4.4}$$

$$\sum_{d,k} \left((d+1)^2 + k^2 + (d+1-k)^2\right) \cdot t_{d,k} \leq 2n \cdot (\Delta+1) - 2\Delta \cdot \alpha \; . \tag{4.5}$$

**Satz 4.5** *Sei $\Delta$ der maximale Grad des Graphen $G = (V,E)$. Dann gilt für die Güte des MIN-Greedy*

$$R_{Gr}(G) \leq \frac{\Delta+2}{3} \; .$$

**Beweis:** Der Beweis des Satzes erfolgt in Abhängigkeit von $\Delta \bmod 3$. Wir unterscheiden dabei 2 Fälle:

*1. Fall:* Sei $\Delta \equiv 0 \bmod 3$ oder $\Delta \equiv 1 \bmod 3$. Wir multiplizieren (4.5) mit $-1$, wobei sich das Relationszeichen umkehrt, und addieren dazu das $2(\Delta+1)$-fache von (4.3):

$$\sum_{d,k} \left[2(\Delta+1)\cdot(d+1) - \left((d+1)^2 + k^2 + (d+1-k)^2\right)\right] \cdot t_{d,k} \geq 2\Delta \cdot \alpha \ . \tag{4.6}$$

Sei

$$B(d) = \min_k \left\{(d+1)^2 + k^2 + (d+1-k)^2\right\} \tag{4.7}$$

und

$$C(d) = 2(d+1)\cdot(\Delta+1) - B(d) \ . \tag{4.8}$$

Wir schätzen damit nun (4.6) ab:

$$\sum_{d,k} C(d) \cdot t_{d,k} \geq 2\Delta \cdot \alpha \ .$$

Die Ungleichung bleibt erhalten, da in (4.7) das Minimum über alle $k$ verwendet wird. Setzt man noch

$$t_d = \sum_k t_{d,k} \ ,$$

erhält man

$$\sum_d C(d) \cdot t_d \geq 2\Delta \cdot \alpha \ .$$

Nun reicht es zu zeigen, dass

$$C(d) \leq 2\Delta \cdot \frac{\Delta+2}{3} \tag{4.9}$$

für $d = 0, 1, \ldots, \Delta$ ist, da in diesem Fall

$$2\Delta \cdot \frac{\Delta+2}{3} \cdot t = \sum_d \left(2\Delta \cdot \frac{\Delta+2}{3} \cdot t_d\right) \geq \sum_d C(d) \cdot t_d \geq 2\Delta \cdot \alpha$$

also

$$\frac{\Delta+2}{3} \cdot t \geq \alpha$$

gilt und damit die Behauptung für $\Delta \equiv 0 \bmod 3$ oder $\Delta \equiv 1 \bmod 3$ bewiesen ist. Zunächst bestimmen wir das minimale $k$ in (4.7). Dazu setzen wir

$$\begin{aligned} f(k) &= (d+1)^2 + k^2 + (d+1-k)^2 \\ &= 2(d+1)^2 + 2k^2 - 2dk - 2k \end{aligned}$$

und leiten $f(k)$ zweimal nach $k$ ab, um das Minimum über alle $k$ zu berechnen:

$$\begin{aligned} f'(k) &= 4k - 2d - 2 \\ f''(k) &= 4 \ . \end{aligned}$$

Da $f''(k) > 0$, ist die Nullstelle

$$k_0 = \frac{d+1}{2}$$

der ersten Ableitung ein Minimum von $f(k)$. Zu beachten ist, dass für den Wert von $k$ nur ganze Zahlen in Frage kommen. Deshalb müssen wir $k_0$ für gerade Werte von $d$ um $1/2$ erhöhen oder veringern, wobei letzteres egal ist, da $f(k)$ ein Polynom zweiten Grades mit Scheitel in $k_0$ ist und damit $f(k_0 + \varepsilon) = f(k_0 - \varepsilon)$ für alle $\varepsilon$ gilt.
Also ist für ungerade Werte von $d$

$$\begin{aligned} B(d) &= (d+1)^2 + \left(\frac{d+1}{2}\right)^2 + \left(d+1-\frac{d+1}{2}\right)^2 \\ &= (d+1)^2 + \frac{1}{4}(d+1)^2 + \frac{1}{4}(d+1)^2 \\ &= \frac{3}{2}(d+1)^2 \end{aligned}$$

und für gerade Werte von $d$

$$\begin{aligned} B(d) &= (d+1)^2 + \left(\frac{d+1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(d+1-\left(\frac{d+1}{2}-\frac{1}{2}\right)\right)^2 \\ &= (d+1)^2 + \left(\frac{d+1}{2}\right)^2 - \frac{d+1}{2} + \frac{1}{4} + \left(\frac{d+1}{2}\right)^2 + \frac{d+1}{2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{2}(d+1)^2 + \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Zu einer Gleichung zusammengefasst ergibt dieses

$$B(d) = \begin{cases} \frac{3}{2}(d+1)^2 & \text{falls } d \text{ ungerade} \\ \frac{3}{2}(d+1)^2 + \frac{1}{2} & \text{falls } d \text{ gerade.} \end{cases} \tag{4.10}$$

Wir definieren nun zwei Funktionen $f_0 \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $f_1 \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 2x \cdot (\Delta + 1) - \frac{3}{2}x^2 \\ f_1(x) &= 2x \cdot (\Delta + 1) - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} = f_0(x) - \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Setzt man $x = d + 1$, erhält man für (4.8) in Verbindung mit (4.10)

$$C(d) = \begin{cases} f_0(d+1) & \text{falls } d \text{ ungerade} \\ f_1(d+1) & \text{falls } d \text{ gerade.} \end{cases}$$

Wir werden das Maximum der Funktionen $f_0(x)$ und $f_1(x)$ bestimmen um (4.9) zu beweisen. Dafür benötigen wir die ersten beiden Ableitungen dieser zwei Funktionen:

$$\begin{aligned} f_0'(x) &= -3x + 2(\Delta + 1) \\ f_0''(x) &= -3 \\ f_1'(x) &= -3x + 2(\Delta + 1) \\ f_1''(x) &= -3\,. \end{aligned}$$

Die Nullstelle von $f_0'(x)$ bzw. $f_1'(x)$ liegt bei

$$x_0 = \frac{2(\Delta + 1)}{3} \ .$$

Da die zweite Ableitung beider Funktionen negativ ist, besitzen $f_0(x)$ und $f_1(x)$ an der Stelle $x_0$ ein Maximum. Sei $x_{odd}$ die am nächsten zu $x_0$ liegende ungerade ganze Zahl und $x_{even}$ die am nächsten zu $x_0$ liegende gerade ganze Zahl. Da für Polynome $p(x)$ zweiten Grades mit dem Scheitel an der Stelle $\tilde{x}$ die Gleichung $p(\tilde{x} + \varepsilon) = p(\tilde{x} - \varepsilon)$ für alle $\varepsilon$ gilt, reicht es

$$f_0(x_{even}) \leq 2\Delta \cdot \frac{\Delta + 2}{3} \tag{4.11}$$

sowie

$$f_1(x_{odd}) \leq 2\Delta \cdot \frac{\Delta + 2}{3} \tag{4.12}$$

zu zeigen, damit die Behauptung (4.9) gilt.
Nach Voraussetzung ist $\Delta \equiv 0 \bmod 3$ oder $\Delta \equiv 1 \bmod 3$. Also folgt

$$\Delta + 1 = 3r + s \tag{4.13}$$

für ein $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $s = \pm 1$, weil $\Delta + 1 \equiv \pm 1 \bmod 3$. Eingesetzt in $x_0$ ergibt dies

$$x_0 = \frac{2(3r + s)}{3} = 2r + \frac{1}{3}s \ .$$

Damit sind $x_{odd}$ und $x_{even}$ eindeutig bestimmt:

$$\begin{aligned} x_{odd} &= 2r + s \\ x_{even} &= 2r \ . \end{aligned}$$

Also erhalten wir für (4.12) und (4.11), mit $\Delta + 1 = 3r + s$:

$$\begin{aligned} f_0(2r) &= 4r \cdot (\Delta + 1) - \frac{3}{2} \cdot 4r^2 \\ &= 4r \cdot (3r + s) - 6r^2 \\ &= 6r^2 + 4rs \\ f_1(2r + s) &= 2(2r + s) \cdot (\Delta + 1) - \frac{3}{2}(2r + s)^2 - \frac{1}{2} \\ &= (4r + 2s) \cdot (3r + s) - \frac{3}{2}(2r + s)^2 - \frac{1}{2} \\ &= 6r^2 + 4rs + \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2} \ . \end{aligned}$$

Mit $s^2 = (\pm 1)^2 = 1$ folgt auch hier

$$f_1(2r + s) = 6r^2 + 4rs \ .$$

Nun muss (4.13) nach $r$ umgestellt und in die letzte Gleichung eingesetzt werden und man erhält

$$\begin{aligned} f_0(2r) = f_1(2r+s) &= 6r^2 + 4rs \\ &= 6\left(\frac{\Delta+1-s}{3}\right)^2 + 4s \cdot \left(\frac{\Delta+1-s}{3}\right) \\ &= \frac{2(\Delta+1-s)^2 + 4s \cdot (\Delta+1-s)}{3} \\ &= \frac{2\Delta \cdot (\Delta+2)}{3} , \end{aligned}$$

womit der erste Teil – für $\Delta \equiv 0 \bmod 3$ oder $\Delta \equiv 1 \bmod 3$ – bewiesen ist.
*Fall 2:* Sei nun $\Delta \equiv 2 \bmod 3$ (bzw. $\Delta \equiv -1 \bmod 3$). Wir multiplizieren (4.5) mit $-1$. Die daraus entstandene Ungleichung wird mit dem zweifachen von (4.4) und dem $2(\Delta+1)$-fachen von (4.3) addiert:

$$\begin{aligned} -\sum_{d,k} \left((d+1)^2 + k^2 + (d+1-k)^2\right) \cdot t_{d,k} + 2 \cdot \sum_{d,k} k \cdot t_{d,k} + 2(\Delta+1) \cdot \sum_{d,k} (d+1) \cdot t_{d,k} \quad \geq \\ 2\Delta \cdot \alpha - 2n \cdot (\Delta+1) + 2\alpha + 2(\Delta+1) \cdot n \ . \end{aligned}$$

Dies wird zu

$$\sum_{d,k} \left(2(\Delta+1) \cdot (d+1) + 2k - (d+1)^2 - k^2 - (d+1-k)^2\right) \cdot t_{d,k} \geq (2+2\Delta) \cdot \alpha \tag{4.14}$$

vereinfacht. Nun setzen wir $C(d,k)$ wie folgt

$$\begin{aligned} C(d,k) &= 2(\Delta+1) \cdot (d+1) + 2k - (d+1)^2 - k^2 - (d+1-k)^2 \\ &= 2(\Delta+1) \cdot (d+1) - 2(d+1)^2 - 2k^2 + 4k + 2dk \\ &= 2(d+1) \cdot (\Delta - d) + 2k \cdot (2+d-k) \ . \end{aligned}$$

Damit lässt sich (4.14) verkürzt aufschreiben:

$$\sum_{d,k} C(d,k) \cdot t_{d,k} \geq 2(\Delta+1) \cdot \alpha \ . \tag{4.15}$$

Sei nun $C(d) = \max_k C(d,k)$. Um das $k$, das das Maximum realisiert, zu suchen, leiten wir die Funktion $f(k)\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(k) = 2(d+1) \cdot (\Delta - d) + 2k \cdot (d+2-k)$$

zweimal ab:

$$\begin{aligned} f'(k) &= -4k + 4 + 2d \\ f''(k) &= -4 \ . \end{aligned}$$

Die Nullstelle der ersten Ableitung liegt bei

$$k_0 = 1 + \frac{d}{2} \; .$$

Zu beachten ist wieder, dass für $k$ nur positive ganze Zahlen in Frage kommen. Für ungerade Werte von $d$ verringern wir $k_0$ deshalb um $1/2$.
Falls $d$ gerade ist, gilt

$$\begin{aligned} C(d) &= 2(d+1)\cdot(\Delta - d) + 2\left(1 + \frac{d}{2}\right)\cdot\left(2 + d - 1 - \frac{d}{2}\right) \\ &= 2(d+1)\cdot(\Delta - d) + \frac{1}{2}(d+2)^2 \end{aligned}$$

und für ungerade Werte von $d$ gilt

$$\begin{aligned} C(d) &= 2(d+1)\cdot(\Delta - d) + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{d}{2}\right)\cdot\left(2 + d - \frac{1}{2} - \frac{d}{2}\right) \\ &= 2(d+1)\cdot(\Delta - d) + \frac{1}{2}(d+2)^2 - \frac{1}{2} \; . \end{aligned}$$

Wir definieren nun zwei Funktionen $f_0(x)\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $f_1(x)\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 2(x+1)\cdot(\Delta - x) + \frac{1}{2}(x+2)^2 - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{3}{2}x^2 + 2\Delta\cdot x + 2\Delta + \frac{3}{2} \\ f_1(x) &= 2(x+1)\cdot(\Delta - x) + \frac{1}{2}(x+2)^2 \\ &= -\frac{3}{2}x^2 + 2\Delta\cdot x + 2\Delta + 2 \; . \end{aligned}$$

Dann lässt sich $C(d)$ wie folgt darstellen:

$$C(d) = \begin{cases} f_0(d) & d \text{ ungerade} \\ f_1(d) & d \text{ gerade} \; . \end{cases}$$

Wir suchen nun eine obere Schranke für $C(d)$. Dazu leiten wir $f_0(x)$ und $f_1(x)$ zweimal ab:

$$\begin{aligned} f_0'(x) &= -3x + 2\Delta \\ f_0''(x) &= -3 \\ f_1'(x) &= -3x + 2\Delta \\ f_1''(x) &= -3 \; . \end{aligned}$$

Die Nullstelle der ersten Ableitungen liegt bei

$$x_0 = \frac{2}{3}\Delta \; .$$

Da $f_0$ und $f_1$ zwei Polynome zweiten Grades mit Scheitel an der Stelle $x_0$ sind gilt $f_0(x_0+\varepsilon) = f_0(x_0-\varepsilon)$ und $f_1(x_0+\varepsilon) = f_1(x_0-\varepsilon)$ für beliebiges $\varepsilon$. Sei $x_{odd}$ und $x_{even}$ definiert wie bei Fall 1. Da $\Delta \equiv -1 \bmod 3$ sind diese Werte eindeutig bestimmt mit

$$\begin{aligned} x_{even} &= 2\frac{\Delta+1}{3} \\ x_{odd} &= 2\frac{\Delta+1}{3} - 1 = \frac{2\Delta-1}{3} \ . \end{aligned}$$

Wir setzen $x_{odd}$ in $f_0(x)$ und $x_{even}$ in $f_1(x)$ ein:

$$\begin{aligned} f_0\left(\frac{2\Delta-1}{3}\right) &= -\frac{3}{2}\left(\frac{2\Delta-1}{3}\right)^2 + 2\Delta\cdot\frac{2\Delta-1}{3} + 2\Delta + \frac{3}{2} \\ &= \frac{4\Delta^2-1}{6} + 2\Delta + \frac{3}{2} \\ &= \frac{2}{3}(\Delta^2+2+3\Delta) \\ &= \frac{2}{3}(\Delta+1)(\Delta+2) \\ f_1\left(\frac{2(\Delta+1)}{3}\right) &= -\frac{3}{2}\left(\frac{2(\Delta+1)}{3}\right)^2 + 2\Delta\cdot\left(\frac{2(\Delta+1)}{3}\right) + 2\Delta + 2 \\ &= (\Delta+1)\cdot(-\frac{2}{3}(\Delta+1) + \frac{4}{3}\Delta + 2) \\ &= \frac{2}{3}(\Delta+1)\cdot(\Delta+2) \ . \end{aligned}$$

Damit gilt

$$C(d,k) \le C(d) = \frac{2}{3}(\Delta+1)\cdot(\Delta+2)$$

und wir können (4.15) wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \sum_{d,k} C(d,k)\cdot t_{d,k} &\ge 2(\Delta+1)\cdot\alpha \\ \frac{2}{3}(\Delta+1)\cdot(\Delta+2)\cdot\sum_{d,k} t_{d,k} &\ge 2(\Delta+1)\cdot\alpha \\ \frac{1}{3}(\Delta+2)\cdot t &\ge \alpha \ , \end{aligned}$$

Also gilt die Behauptung für den Fall $\Delta \equiv 2 \bmod 3$. Zusammen mit Fall 1 ist der Satz bewiesen. □

## 4.2 Untere Schranken

Die in Satz 4.5 gezeigte obere Schranke für die Güte des Min-Greedy Algorithmus kann nicht wesentlich verbessert werden.

**Satz 4.6** *Es gibt Graphen $G = (V, E)$ mit maximalem Knotengrad $\Delta \geq 3$, so dass für die Güte des MIN-Greedy Algorithmus*

$$R_{Gr}(G) \geq \frac{\Delta + 2}{3} - O(\Delta^2/n)$$

*gilt.*

**Beweis:** Wir konstruieren in Abhängigkeit von $\Delta$ mod 3 Graphen, so dass der Greedy Algorithmus keine bessere Güte erreichen kann.
*Fall 1:* Es sei $\Delta \equiv 1 \bmod 3$. Wir konstruieren nun für einen Parameter $j \geq 2$ einen Graphen, der aus einer Kette von Teilgraphen zusammengesetzt wird. Jeder Teilgraph hat die Struktur

$$K_j — \overline{K_j}\ ,$$

besteht also aus einer $j$-elementigen Clique $K_j$ und einer $j$-elementigen unabhängigen Menge $\overline{K_j}$, wobei jeder Knoten der unabhängigen Menge mit jedem Knoten der Clique verbunden wird.

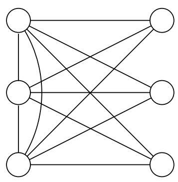

Abbildung 4.2: Teilgraph für den Fall $\Delta \equiv 1 \bmod 3$ mit $j = 3$

Die Teilgraphen verbindet man zu einer Kette, indem alle Knoten der unabhänigen Menge mit den Knoten der Clique des nächsten Teilgraphen – bis auf ein perfektes Matching – vollständig verbunden werden. Jede Kette wird durch eine Clique $K_j$, die vollständig mit der unabhängigen Menge des letzten Teilgraphen verbunden ist, abgeschlossen.

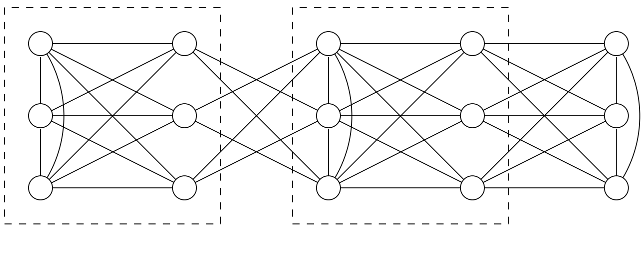

Abbildung 4.3: Aus zwei Teilgraphen bestehender Graph für den Fall $\Delta \equiv 1 \bmod 3$

Eine Analyse der Knotengrade ergibt Tabelle 4.1. Der Maximalgrad $\Delta = 3j - 2$ erfüllt $\Delta \equiv 1 \bmod 3$. Der minimale Knotengrad ist $2j - 1$, wobei die Knoten der ersten Clique diesen Knotengrad besitzen. Wir können nun annehmen, dass der Min-Greedy Algorithmus einen Knoten $v \in V$ der ersten Clique wählt und zur unabhängigen Menge $I_{Gr}$ hinzufügt. Danach wird der Knoten $v$ und seine Nachbarschaft $N(v)$ inklusive der inzidenten Kanten gelöscht.

| | Knotengrad |
|---|---|
| Knoten der ersten Clique | $2j-1$ |
| Knoten der abschließenden Clique | $2j-1$ |
| Knoten aller anderen Cliquen | $3j-2$ |
| Knoten der letzten unabhängigen Menge | $2j$ |
| Knoten aller anderen unabhängigen Mengen | $2j-1$ |

Tabelle 4.1: Knotengrade der konstruierten Graphen des Falles $\Delta \equiv 1 \bmod 3$

Es entsteht dadurch wieder ein Graph, der – bis auf einen Teilgraphen weniger – genau die Gestalt wie vorher hat. Setzt man dies nun fort, dann wählt der Min-Greedy Algorithmus von jedem Teilgraphen einen Knoten (jeweils aus der Clique) sowie einen Knoten aus der letzten Clique. Die ausgegebene unabhängige Menge $I_{Gr}$ besteht also aus

$$|I_{Gr}| = \frac{n-j}{2j} + 1$$

vielen Knoten. In Abbildung 4.4 sind die Knoten, die der Min-Greedy Algorithmus zum Beispiel wählen würde, schwarz markiert. Die optimale Lösung enthält jedoch die Knoten der

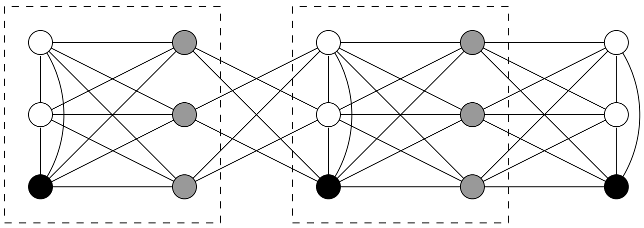

Abbildung 4.4: Algorithmisch bestimmte unabhängige Mengen für den Fall $\Delta \equiv 1 \bmod 3$

unabhänigen Mengen, welche in Abbildung 4.4 grau markiert sind, und von denen es

$$|I_{max}| = \frac{n-j}{2}$$

viele gibt. Wir erhalten also eine Güte von

$$\begin{aligned} R_{Gr}(G) &\geq \frac{(n-j)/2}{(n-j)/(2j)+1} \\ &= j - \frac{2j^2}{n+j} \ . \end{aligned} \tag{4.16}$$

Der maximale Grad dieser Graphen ist $\Delta = 3j-2$. Also gilt

$$\begin{aligned} R_{Gr}(G) &\geq j - \frac{2j^2}{n+j} \\ &= \frac{\Delta+2}{3} - \frac{2 \cdot ((\Delta+2)/3)^2}{n+(\Delta+2)/3} \\ &= \frac{\Delta+2}{3} - O(\Delta^2/n) \ . \end{aligned}$$

*Fall 2:* Es sei $\Delta \equiv 0 \bmod 3$. Wiederum konstruieren wir einen Graphen für einen Parameter $j \geq 2$, der aus einer Kette von Teilgraphen besteht. Die Teilgraphen haben in diesem Fall die Struktur

$$K_{j-1} - \overline{K_j} - K_{j-1} - \overline{K_j} - K_j - \overline{K_{j-1}}\ .$$

Die einzelnden Cliquen bzw. unabhängigen Mengen sind in folgender Weise miteinander verbunden: Jede Clique ist vollständig mit der nächsten unabhängigen Menge verbunden. Die Verbindung einer unabhängigen Menge mit der nächsten Clique ist – bis auf ein einzelnes maximales Matching – vollständig. In dieser Weise erfolgt auch die Verbindung zweier Teilgraphen. Von den $j$ Knoten der ersten unabhängigen Menge jedes Teilgraphen haben aufgrund

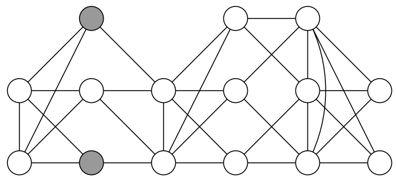

Abbildung 4.5: Teilgraph für den Fall $\Delta \equiv 0 \bmod 3$ mit $j = 3$

des fehlenden maximalen Matchings genau $j-1$ Knoten einen Knotengrad von $2j-3$. Diese Knoten, welche in Abbildung 4.5 grau dargestellt sind, werden mit einem Knoten der ersten Clique im nächsten Teilgraphen verbunden, wobei jeder Knoten dieser Clique genau eine zusätzliche Kante erhält. Die Kette von Teilgraphen wird mit einer Clique $K_{j-1}$, die vollständig mit der letzten unabhängigen Menge des letzten Teilgraphen verbunden ist, abgeschlossen.

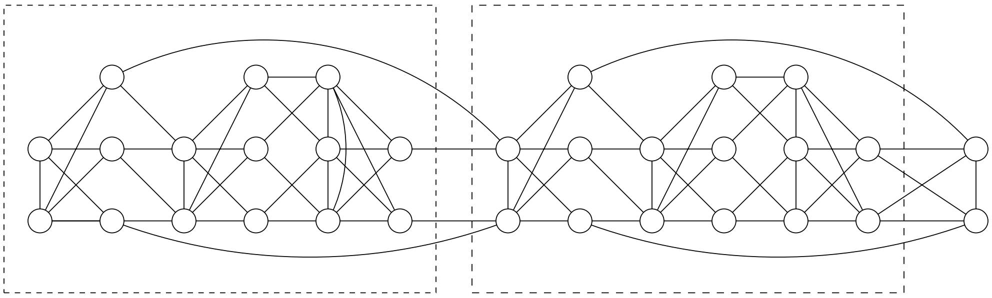

Abbildung 4.6: Aus zwei Teilgraphen bestehender Graph für den Fall $\Delta \equiv 0 \bmod 3$

Eine Analyse der Knotengrade ergibt Tabelle 4.2. Der Maximalgrad $\Delta = 3j - 3$ erfüllt $\Delta \equiv 0 \bmod 3$. Der minimale Knotengrad ist $2j-2$. Die Knoten der ersten Clique im ersten Teilgraphen haben genau diesen Knotengrad, so dass wir annehmen können, dass der MIN-Greedy Algorithmus einen dieser Knoten wählt. Danach wird ein Knoten der nächsten Clique (im Originalgraphen also die zweite Clique im ersten Teilgraphen) und dann ein Knoten der letzten Clique im ersten Teilgraphen gewählt. In jedem dieser Fälle ist der Minimalgrad $2j-2$. Nachdem der erste Teilgraph entfernt wurde und damit 3 Knoten zur unabhängigen Menge

| | Knotengrad |
|---|---|
| Knoten der ersten Clique | $2j-2$ |
| Knoten der abschließenden Clique | $2j-2$ |
| Knoten aller anderen Cliquen | $3j-3$ |
| Knoten der letzten unabhängigen Menge | $2j-1$ |
| Knoten aller anderen unabhängigen Mengen | $2j-2$ |

Tabelle 4.2: Knotengrade der konstruierten Graphen des Falles $\Delta \equiv 0 \bmod 3$

$I_{Gr}$ hinzugefügt wurden, wird analog weiter verfahren. Schließlich wählt der Min-Greedy einen Knoten der letzten Clique. In Abbildung 4.7 sind die Knoten, die der Min-Greedy Algorithmus zum Beispiel wählt, schwarz dargestellt.

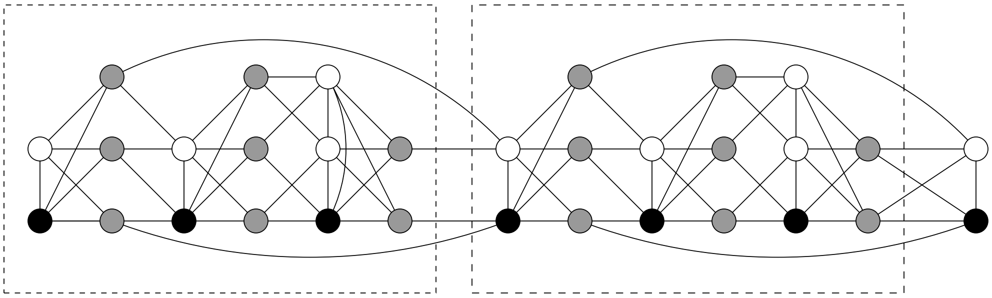

Abbildung 4.7: Algorithmisch bestimmte unabhängige Mengen für den Fall $\Delta \equiv 0 \bmod 3$

Zählt man diese zusammen, erhält man

$$|I_{Gr}| = 3 \cdot \frac{n-j+1}{6j-3} + 1 \ .$$

Optimal wären jedoch die Knoten, welche in Abbildung 4.7 grau dargestellt sind, deren Anzahl

$$|I_{max}| = (3j-1) \cdot \frac{n-j+1}{6j-3}$$

ist.

Damit erhalten wir für die Güte

$$\begin{aligned} R_{Gr}(G) &\geq \frac{(3j-1)\cdot(n-j+1)/(6j-3)}{3(n-j+1)/(6j-3)+1} \\ &= \frac{3j-1}{3} - \frac{6j^2-5j+1}{3n+3j} \ . \end{aligned}$$

Der maximale Knotengrad ist $\Delta = 3j-3$. Setzen wir für $j$ also $j = \Delta/3+1$ ein, ergibt dies

$$\begin{aligned} R_{Gr}(G) &\geq \frac{\Delta+2}{3} - \frac{2\Delta^2/3+8\Delta/3-3}{3n+\Delta+3} \\ &= \frac{\Delta+2}{3} - O(\Delta^2/n) \ , \end{aligned}$$

womit die Behauptung für den Fall $\Delta \equiv 0 \bmod 3$ bewiesen ist.
*Fall 3:* Es sei $\Delta \equiv 2 \bmod 3$. Der nun konstruierte Graph für $j \geq 2$ hat eine ähnlich komplexe Struktur, wie im vorangegangenen Fall. Die Teilgraphen haben die Form

$$K_{j-1} - \overline{K_{j+1}} - K_j - \overline{K_j} - K_j - \overline{K_j} \ .$$

Auch hier wird jede Clique vollständig mit der nächsten unabhängigen Menge verbunden. Die unabhängigen Mengen sind – bis auf ein einzelnes maximales Matching – vollständig mit der nächsten Clique verbunden. Zusätzlich werden die $j$ Knoten der ersten unabhängigen Menge, die bis jetzt nur den Knotengrad $2j - 2$ haben, mit einem Knoten der letzten Clique in dem Teilgraphen verbunden, wobei jeder Knoten dieser Clique genau eine zusätzliche Kante erhält. Ein vollständiger Teilgraph für $j = 3$ ist in Abbildung 4.8 dargestellt.

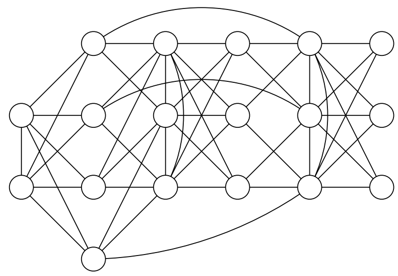

Abbildung 4.8: Teilgraph für den Fall $\Delta \equiv 2 \bmod 3$ mit $j = 3$

Eine beliebige Anzahl von Teilgraphen wird nun zu einer Kette zusammengefügt, indem die letzte unabhängige Menge eines Teilgraphen wiederum vollständig mit der ersten Clique des nächsten Teilgraphen verbunden wird. Diese Kette wird mit einer $j$-elementigen Clique abgeschlossen, welche ebenfalls vollständig mit der letzten unabhängigen Menge des letzten Teilgraphen verbunden wird.

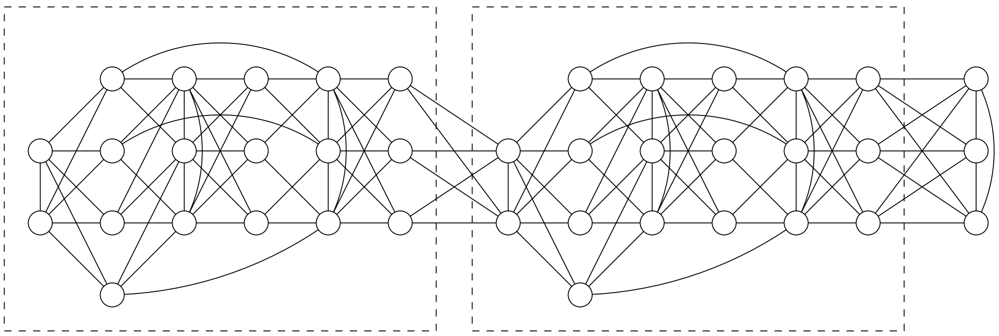

Abbildung 4.9: Aus zwei Teilgraphen bestehender Graph für den Fall $\Delta \equiv 2 \bmod 3$

Wiederum analysieren wir die Knotengrade und erhalten Tabelle 4.3. Der Maximalgrad $\Delta = 3j-1$ erfüllt $\Delta \equiv 2 \bmod 3$. Der minimale Knotengrad dieser Graphen ist $2j-1$. Die Knoten der ersten Clique haben diesen Grad, so dass wir annehmen können, dass der Greedy Algorithmus

| | Knotengrad |
|---|---|
| Knoten der ersten Clique | $2j-1$ |
| Knoten der abschließenden Clique | $2j-1$ |
| Knoten aller anderen Cliquen | $3j-1$ |
| Knoten der letzten unabhängigen Menge | $2j$ |
| Knoten aller anderen unabhängigen Mengen | $2j-1$ |

Tabelle 4.3: Knotengrade der konstruierten Graphen des Falles $\Delta \equiv 2 \bmod 3$

einen dieser Knoten wählt und zur unabhängigen Menge $I_{Gr}$ hinzufügt. Analog zu Fall 2 wird nun immer ein Knoten der – im Restgraphen – ersten Clique gewählt bis kein Knoten mehr vorhanden ist. Diese Knoten sind in Abbildung 4.10 schwarz dargestellt. Die Kardinalität dieser unabhängigen Menge ist

$$|I_{Gr}| = 3 \cdot \frac{n-j}{6j} + 1 \ .$$

Optimal wären jedoch wiederum die Knoten, die in Abbildung 4.10 grau markiert sind, und von denen es

$$|I_{max}| = (3j+1) \cdot \frac{n-j}{6j}$$

viele gibt.

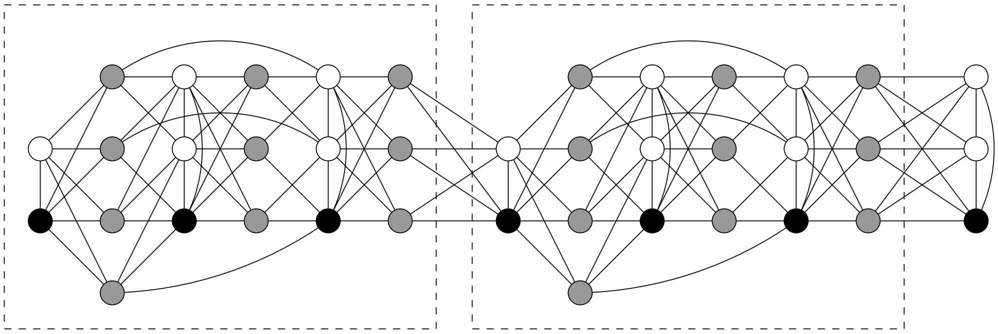

Abbildung 4.10: Algorithmisch bestimmte unabhängige Mengen für den Fall $\Delta \equiv 2 \bmod 3$

Also erhalten wir für die Güte

$$\begin{aligned} R_{Gr}(G) &\geq \frac{(3j+1) \cdot (n-j)/(6j)}{3(n-j)/(6j)+1} \\ &= \frac{3j+1}{3} - \frac{6j^2+2j}{3n+3j} \ . \end{aligned}$$

Der maximale Knotengrad ist $\Delta = 3j-1$, also setzen wir $j = (\Delta+1)/3$ ein und erhalten

$$\begin{aligned} R_{Gr}(G) &\geq \frac{\Delta+2}{3} - \frac{2\Delta^2/3 + 2\Delta + 4/3}{3n+\Delta+1} \\ &= \frac{\Delta+2}{3} - O(\Delta^2/n) \ . \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis für alle 3 Fälle abgeschlossen. □

Der letzte Satz bezog sich auf die Güte in Abhängigkeit von $\Delta$. Wir wollen nun auch eine Aussage bezüglich des Durchschnittsgrades $\overline{d}$ hinzufügen.

**Korollar 4.7** *Es gibt Graphen $G = (V, E)$ mit durchschnittlichem Knotengrad $\overline{d}$, so dass für die Güte des MIN-Greedy Algorithmus*

$$R_{Gr}(G) \geq \frac{2\overline{d}+3}{5} - O(\overline{d}^2/n)$$

*gilt.*

**Beweis:** Wir verwenden die konstruierten Graphen aus dem ersten Fall vom Beweis von Satz 4.6. Zunächst müssen wir den Durchschnittsgrad dieser Graphen ermitteln. Dazu addieren wir alle Knotengrade entsprechend Tabelle 4.1 multipliziert mit deren Anzahl und erhalten

$$\begin{aligned}
\overline{d} \cdot n &= \underbrace{j \cdot (2j-1)}_{\text{erste Clique}} + \underbrace{j \cdot (2j-1)}_{\text{letzte Clique}} + \underbrace{j \cdot 2j}_{\text{letzte unabhängige Menge}} \\
&\quad + \underbrace{\left(\frac{n-j}{2j} - 1\right) \cdot j \cdot (2j-1)}_{\text{restliche unabhängige Mengen}} + \underbrace{\left(\frac{n-j}{2j} - 1\right) \cdot j \cdot (3j-2)}_{\text{restliche Cliquen}} \\
&= \frac{n-j}{2j} \cdot (5j^2 - 3j) + j^2 + j) \\
&= -\frac{3}{2}j^2 + \frac{5}{2}j + \frac{5}{2}jn - \frac{3}{2}n\,.
\end{aligned}$$

Durch $n$ geteilt ergibt dieses für den durchschnittlichen Knotengrad

$$\begin{aligned}
\overline{d} &= \frac{5j-3}{2} - \frac{3j^2-5j}{2n} \\
&\leq \frac{5j-3}{2}\,. \qquad (\text{da } j \geq 2)
\end{aligned}$$

Um nun

$$j \geq \frac{2\overline{d}+3}{5} \tag{4.17}$$

in die Formel (4.16) einsetzen zu können, müssen wir überprüfen, ob die Funktion $f(j)$ mit

$$f(j) = j - \frac{2j^2}{n+j}$$

für $2 \leq j \leq n/3$ monoton steigend ist. Die obere Schranke für $j$ existiert, da jeder Graph mindestens aus einem Teilgraphen mit $2j$ Knoten und der abschließenden Clique mit $j$ Knoten – also zusammen mindestens $n \geq 3j$ Knoten – besteht.
Wir leiten $f(j)$ einmal ab:

$$\begin{aligned}
f'(j) &= 1 - \frac{4j \cdot (n+j) - 2j^2}{(n+j)^2} \\
&= 1 - \frac{4n \cdot j - 2j^2}{(n+j)^2}\,.
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{array}{lrcll}
 & 1 & \geq & \dfrac{4n \cdot j + 2j^2}{(n+j)^2} & \\
\Longleftrightarrow & (n+j)^2 & \geq & 4n \cdot j + 2j^2 & \\
\Longleftrightarrow & n^2 + 2n \cdot j + j^2 & \geq & 4n \cdot j + 2j^2 & \\
\Longleftrightarrow & n^2 - 2n \cdot j - j^2 & \geq & 0 & \\
\Longleftrightarrow & n^2 - 2n \cdot \dfrac{n}{3} - \dfrac{n^2}{9} & \geq & 0 & \text{da } j \leq \dfrac{n}{3} \\
\Longleftrightarrow & \dfrac{2}{9}n^2 & \geq & 0\,. &
\end{array}$$

Damit gilt $f'(j) \geq 0$ für $2 \leq j \leq n/3$ und die Funktion $f(j)$ ist in diesem Intervall monoton steigend. Wir können nun (4.17) in (4.16) einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned}
R_{Gr}(G) &\geq \frac{2\overline{d}+3}{5} - \frac{2 \cdot ((2\overline{d}+3)/5)^2}{n + (2\overline{d}+3)/5} \\
&= \frac{2\overline{d}+3}{5} - O(\overline{d}^2/n)\,.
\end{aligned}$$ □

Im folgenden Satz werden wir zeigen, dass die in Satz 4.4 gezeigte obere Schranke bezüglich des durchschnittlichen Knotengrades nicht wesentlich verbessert werden kann.

**Satz 4.8** *Es gibt Graphen $G = (V, E)$ mit durchschnittlichem Knotengrad $\overline{d}$, so dass für die Güte des MIN-Greedy Algorithmus*

$$R_{Gr}(G) \geq \frac{\overline{d}+2}{2} - O(1/\overline{d})$$

*gilt.*

**Beweis:** Wir konstruieren eine Familie von Graphen in Abhängigkeit eines Parameters $j \geq 2$, so dass diese Güte erreicht wird. Diese Graphen bestehen aus einer Kette von Teilgraphen der Form

$$K_1 - \overline{K_j}\,,$$

wobei $K_1$ einen einzelnen Knoten darstellt, der vollständig mit der $j$-elementigen unabhängigen Menge $\overline{K_j}$ verbunden ist. Die Anzahl $h$ der Teilgraphen soll dabei wesentlich größer als der Parameter $j$ sein. Die Kette von Teilgraphen wird mit einer $j$-elementigen Clique $K_j$ abgeschlossen. Die Verbindung der einzelnen Teilgraphen und der letzten Clique geschieht nun in folgender Weise: Für die ersten $h-j+1$ Teilgraphen wird jeder Knoten aus der $j$-elementigen unabhängigen Menge $\overline{K_j}$ eines Teilgraphens mit den einzelnen Cliquenknoten $K_1$ der $j-1$ nachfolgenden Teilgraphen verbunden. Für die $j$ Knoten der unabhängigen Mengen $\overline{K_j}$ der letzten $j-1$ Teilgraphen müssen wir etwas anders verfahren, da diese nicht insgesamt $j-1$ nachfolgende Teilgraphen besitzen. Zunächst verbinden wir diese ebenfalls mit den einzelnen

Cliquenknoten $K_1$ der nachfolgenden Teilgraphen. Die $j$ Knoten der unabhängigen Mengen $\overline{K_j}$ der $i$'ten letzten Teilgraphen ($i = 1, \ldots, j-1$) benötigen nun noch $j - i$ Kanten für einen Knotengrad von $j$. Hierzu verwenden wir die Knoten der abschließenden Clique $K_j$, wobei die $j$ unabhängigen Knoten des $i$'ten letzten Teilgraphens durch $j - i$ paarweise verschiedene Matchings mit den $j$ Knoten der letzten Clique $K_j$ verbunden werden. Die Verwendung von paarweise verschiedenen Matchings soll das Auftreten von Mehrfachkanten verhindern.

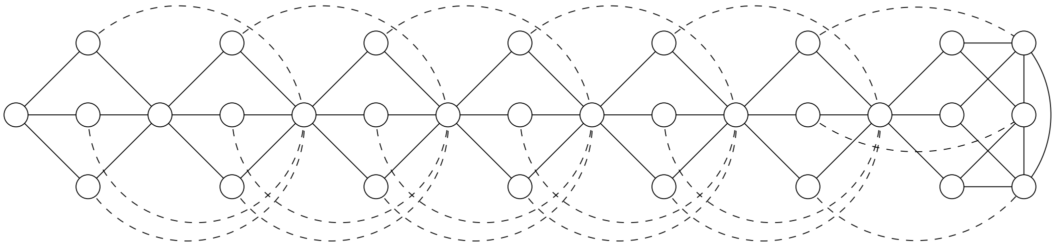

Abbildung 4.11: Abgeschlossene Kette von sieben Teilgraphen für $j = 3$

Wir analysieren die Knotengrade und erhalten Tabelle 4.4.

| | Knotengrad |
|---|---|
| Knoten der ersten Clique $K_1$ | $j$ |
| Knoten aller unabhängigen Mengen $\overline{K_j}$ | $j$ |
| Knoten der abschließenden Clique $K_j$ | $(j-1) + \sum_{i=1}^{j-1} i$ |
| Knoten der $i$'ten Clique $K_1$ für $i = 2, \ldots, j-1$ | $i \cdot j$ |
| Knoten aller anderen Cliquen $K_1$ | $j^2$ |

Tabelle 4.4: Knotengrade der konstruierten Graphen des Beweises von Satz 4.8

Nach Konstruktion dieser Graphen ist der minimale Knotengrad $j$. Der Cliquenknoten $K_1$ aus dem ersten Teilgraphen hat Knotengrad $j$, so dass wir annehmen können, dass der Greedy Algorithmus mit diesem Knoten beginnen wird. Der Restgraph enthält nach dem Löschen dieses Knotens sowie seiner Nachbarn genau einen Teilgraphen weniger. Wir können also weiterhin annehmen, dass sich dieses Verhalten bis zum Ende der Kette fortsetzt.

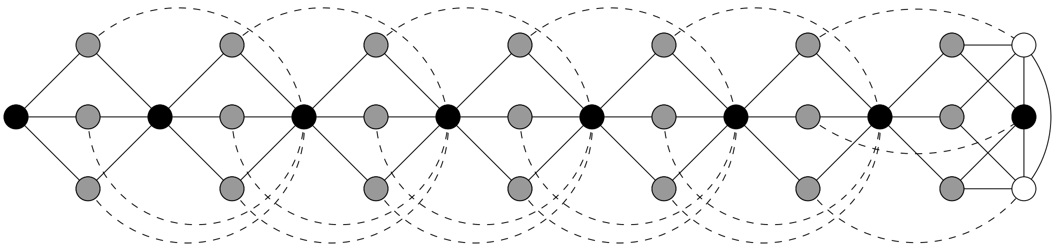

Abbildung 4.12: Algorithmisch bestimmte unabhängige Menge für Graphen des Satzes 4.8

Der Min-Greedy Algorithmus findet bei $h$ Teilgraphen $h + 1$ unabhängige Knoten (in Abbildung 4.12 schwarz), während alle unabhängigen Mengen $\overline{K_j}$ jedes Teilgraphens (in Abbildung 4.12 grau) eine unabhängige Menge der Kardinalität $h \cdot j$ bilden würden, was offenbar optimal ist. Wir erhalten also eine Güte von

$$R_{Gr}(G) \geq \frac{h \cdot j}{h+1} = j - \frac{j}{h+1} \ .$$

Nach Voraussetzung soll die Anzahl $h$ Teilgraphen im Vergleich zu $j$ groß ist, also gilt für die Güte

$$R_{Gr}(G) \geq j - o(1) \ , \tag{4.18}$$

da in diesem Fall der Knoten aus der abschließenden Clique kaum noch ins Gewicht fällt und der Term

$$\frac{j}{h+1}$$

gegen Null konvergiert.
Wir wollen nun den durchschnittlichen Knotengrad berechnen. Dazu verwenden wir Tabelle 4.4 und addieren die jeweiligen Knotengrade multipliziert mit deren Anzahl:

$$\begin{aligned}
\overline{d} \cdot n &= \underbrace{j \cdot j \cdot h}_{\substack{\text{Knoten der}\\ \text{unabhängigen}\\ \text{Mengen}}} + \underbrace{j \cdot \left( (j-1) + \sum_{i=1}^{j-1} i \right)}_{\text{Knoten der abschließenden Clique}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{j-1} i \cdot j}_{\substack{\text{erste } j-1\\ \text{Cliquen } K_1}} + \underbrace{(h-j+1) \cdot j^2}_{\text{restliche Cliquen } K_1} \\
&= h \cdot j^2 + j \cdot (j-1) + j \cdot j \cdot (j-1) + j^2 \cdot (h-j+1) \\
\Longleftrightarrow \quad \overline{d} &= \frac{2h \cdot j^2 + j^2 - j}{n} \ .
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Für die Anzahl $h$ der Teilgraphen gilt

$$h = \frac{n-j}{j+1}$$

also können wir

$$n = h \cdot (j+1) + j$$

in (4.19) einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned}
\overline{d} &= \frac{2h \cdot j^2 + j^2 - j}{h \cdot (j+1) + j} \\
&= \frac{2j^2}{j+1} - \frac{j^3 + j}{(j+1) \cdot (h \cdot (j+1) + j)} \\
&= 2j - 2 + \frac{2}{j+1} - o(1) \ . \qquad (\text{da } h \gg j)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Die Gleichung (4.20) formen wir zu

$$j \geq \frac{\overline{d} + 2}{2} - \frac{1}{j+1}$$

um. Nun setzen wir

$$j' := \frac{\overline{d}+2}{2} - 1 \ ,$$

wobei wegen $\overline{d} \geq 0$ stets $j \geq j'$ gilt. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} j &\geq \frac{\overline{d}+2}{2} - \frac{1}{j'+1} \\ &= \frac{\overline{d}+2}{2} - \frac{2}{\overline{d}+2} \\ &= \frac{\overline{d}+2}{2} - O(1/\overline{d}) \ . \end{aligned}$$

und aufgrund von Formel (4.18) gilt die Behauptung. □

Im Anschluss an den Beweis von Satz 4.4 haben wir gezeigt, dass sogar

$$R_{Gr}(G) \leq \frac{\overline{d}+2}{2} - O(\overline{d}/n) \tag{4.21}$$

gilt. Dies ist kein Widerspruch zu Satz 4.8, da der durchschnittliche Knotengrad $\overline{d}$ der Graphen im Beweis von Satz 4.8 im wesentlichen nur von dem Parameter $j$ abhängt und demzufolge unabhängig von der Anzahl $n$ der Knoten ist. Für $n \to \infty$ sowie konstante Werte von $\overline{d}$ konvergiert (4.21) gegen

$$R_{Gr}(G) \leq \frac{\overline{d}+2}{2}$$

und erfüllt damit

$$R_{Gr}(G) \geq \frac{\overline{d}+2}{2} - O(1/\overline{d}) \ .$$

# Abbildungsverzeichnis

# Tabellenverzeichnis

# Literaturverzeichnis


[1] M. M. Halldórsson und J. Radhakrishnan, *Greed is Good: Approximating Independent Sets in Sparse and Bounded-degree Graphs*, Proc. Twenty-Sixth Annual ACM Symp. on the Theory of Computing, Canada, 439-448, 1994.

[2] M. M. Halldórsson und J. Radhakrishnan, *Greed is Good: Approximating Independent Sets in Sparse and Bounded-degree Graphs*, Algorithmica, Springer Verlag, New York, 145-163, 1997.

[3] J. R. Griggs, *Lower Bounds on the Independence Number in Terms of the Degrees*, J. Combin. Theory Ser. B, 34:22-39, 1983.

[4] M. M. Halldórsson, *Approximations of Independent Sets in Graphs*, APPROX Workshop in Aalborg, 1-14, 1998.

[5] P. Berman und M. Fürer, *Approximating Maximum Independent Set in Bounded Degree Graphs*, Proc. Fifth Ann. ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms, 365-371, 1994.

[6] R. Diestel, *Graphentheorie*, Elektronische Ausgabe, Springer Verlag, Heidelberg, 2000.

[7] M. Aigner, *Diskrete Mathematik*, 4. durchgesehene Auflage, Vieweg Verlag, 2001.

[8] T. H. Cormen, C. E. Leierson und R. L. Rivest, *Introduction to Algorithms*, Twenty fourth printing, MIT Press, 2000.

[9] M. R. Garey und D.S. Johnson, *Computers and Intractability - A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman, San Francisco, 1979.